Corrections Savoirs Si. 3

Corrigé Exercice 7

1) a) $u_n \geq 3n^2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^2 = +\infty$, donc d'après le théorème de comparaison : $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

b) $u_n \leq -2\sqrt{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -2\sqrt{n} = -\infty$, donc d'après le théorème de comparaison, on a $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$.

c) $u_n \leq e^n$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty$, on ne peut rien en conclure.

d) Comme $u_n \leq 1-n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-n) = -\infty$, donc par le théorème de comparaison : $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$.

e) $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1-n = -\infty \end{cases}$ donc, par produit de limites, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2(1-n) = -\infty$.
Or $u_n \leq n^2(1-n)$, donc par le théorème de comparaison : on a $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$.

f) $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ car } \frac{1}{2} \in]-1;1[\end{cases}$ Donc, par somme de limites, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = +\infty$.
Or $u_n \geq n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$, donc par le théorème de comparaison : $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

g) $u_n \geq 2-n$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} 2-n = -\infty$, on ne peut rien conclure.

h) On a $5 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 5^n = +\infty$. Or $u_n \geq 5^n$, donc par le théorème de comparaison :
$\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

2) a) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$.
Or $1-\frac{1}{n} \leq u_n \leq 1+\frac{1}{n}$, donc par le théorème des gendarmes : $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$.

b) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $\frac{1}{2} \in]-1;1[$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ car $\frac{2}{3} \in]-1;1[$.
Or $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$, donc par le théorème des gendarmes : $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

c) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 1$ car $\frac{1}{2} \in]-1;1[$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 2$.
Il ne s'agit pas de la même limite, on ne peut **rien conclure.**

d) On a $\frac{n}{n^2+1} = \frac{n}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$.
On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(4-\frac{n}{n^2+1}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(4+\frac{1}{n+1}\right) = 4$.
Or $4-\frac{n}{n^2+1} \leq u_n \leq 4+\frac{1}{n+1}$, donc d'après le théorème des gendarmes : $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4}$.

e) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty$ on ne peut **rien conclure .**

f) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{n^2} = 0$ et $\frac{1}{n^2} \leq u_n \leq \frac{4}{n^2}$, d'après le théorème des gendarmes : $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

3) a) On a $u_n \geq n-1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-1) = +\infty$, donc par le théorème de comparaison : $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

b) On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2-\frac{1}{2^n}\right) = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\frac{1}{2^n}\right) = 2$.
Or $2-\frac{1}{2^n} \leq u_n \leq 2+\frac{1}{2^n}$, donc par le théorème des gendarmes : $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2}$.

c) On a $u_n \leq 2-n^2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(2-n^2) = -\infty$, donc par le théorème de comparaison : $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$.

d) On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(5+\frac{5}{n}\right) = 5$ et $5 \leq u_n \leq 5+\frac{5}{n}$, d'après le théorème des gendarmes : $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5}$.

e) $\frac{2n}{n^2+1} = \frac{2}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n}{n^2+1} = 0$, de même $\frac{2n+1}{n^2+1} = \frac{2+\frac{1}{n}}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{n^2+1} = 0$.
Or $\frac{2n}{n^2+1} \leq u_n \leq \frac{2n+1}{n^2+1}$, donc par le théorème des gendarmes : $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

f) On a $u_n \geq \ln n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln n = +\infty$, donc par le théorème de comparaison : $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

Corrigé Exercice 8

1) On a pour tout entier naturel n : $n^2+1 \geq n^2 \Rightarrow \sqrt{n^2+1} \geq \sqrt{n^2} \Rightarrow u_n \geq n$ car la racine carrée est croissante. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc, d'après le théorème de comparaison, $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

2) On a, pour tout entier naturel n, $-1 \leq (-1)^n \leq 1 \Rightarrow -3n^2-1 \leq v_n \leq -3n^2+1$.
Donc $v_n \leq -3n^2+1$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(-3n^2) = -\infty$ donc, le théorème de comparaison $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty}$.

3) On a, pour tout entier naturel n : $-1 \leq \cos n \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow n-\frac{1}{n} \leq w_n \leq n+\frac{1}{n}$.
Donc en particulier $n-\frac{1}{n} \leq w_n$ Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$.
Donc par somme de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n-\frac{1}{n}\right) = +\infty$ et, par le théorème de comparaison, $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty}$.

4) Pour $n \geq 0$, on a $-\frac{\sqrt{n}}{n^2+1} \leq 0$ et donc $a_n \leq b_n$ Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(-n^3) = -\infty$ donc, d'après les théorèmes de comparaison, $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty}$.

5) <u>Initialisation</u> : Pour $n = 0$, $u_n = u_0 = 1 > 0^2$ **La propriété est vraie au rang 0.**
<u>*Héréd.*</u> : Si la propriété $u_n > n^2$ est vraie pour $n = p$, alors on a : $u_p > p^2$.
Alors pour $n = p+1$, on a :

D'une part	*D'autre part*
$u_n = u_{p+1} = u_p + 2p + 1$	$n^2 = (p+1)^2 = p^2+2p+1$
$u_p > p^2$ donc $u_p + 2p + 1 > p^2 + 2p + 1$	
Et donc $u_{p+1} > p^2 + 2p + 1$	

On a ainsi $u_{(p+1)} \geq (p+1)^2$ **La propriété est vraie au rang $\boldsymbol{p+1}$**
<u>Conclusion</u> : Pour tout entier $n \geq 0$, on a $\boldsymbol{u_n \geq n^2}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc, d'après le théorème de comparaison, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Corrigé Exercice 9

1) Pour tout entier n on a : $-1 \leq (-1)^n \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 2 \leq 3 + (-1)^n \leq 4 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\frac{2}{n} \leq u_n \leq \frac{4}{n}}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{n} = 0$ Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

2) Pour tout entier n on a : $-1 \leq \cos n \leq 1 \quad \Rightarrow \quad n-1 \leq n + \cos n \leq n+1 \;\Rightarrow\; \frac{n-1}{n} \leq \frac{n+\cos n}{n} \leq \frac{n+1}{n}$

$\Rightarrow 1 - \frac{1}{n} \leq \frac{n+\cos n}{n} \leq 1 + \frac{1}{n}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1.}$

3) On a : $n \geq 1 \quad \Rightarrow \quad 1 + n \geq 2 \;\Rightarrow\; 0 < \frac{1}{1+n} \leq \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \Rightarrow\; 0 < \left(\frac{1}{1+n}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \;\Rightarrow\; \boldsymbol{0 \leq w_n \leq \frac{1}{2^n}}$

(car $(x \mapsto x^n)$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$).

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0.}$

4) a) <u>Initialisation</u> : Pour $n = 1$, on a $u_n = u_1 = e^{\frac{1}{2}} \div \frac{5}{2} = \frac{2}{5}e^{\frac{1}{2}} \simeq 0{,}7$ donc

La propriété $0 < u_n \leq 1$ est vraie au rang 1.

<u>*Héréd.*</u> : Si la propriété $0 < u_n \leq 1$ est vraie pour $n = p$, alors on a : $0 < u_p \leq 1$.

Alors pour $n = p + 1$, on a : $u_n = u_{p+1} = \frac{e^{u_p}}{p+2}$

Or on a $p \geq 1 \Rightarrow p + 2 \geq 3 \;\Rightarrow\; 0 < \frac{1}{p+2} \leq \frac{1}{3}$ et comme $e^{u_p} > 0$, on a : $0 < \frac{e^{u_p}}{p+2} \leq \frac{e^{u_p}}{3} \Rightarrow 0 < u_{p+1} \leq \frac{e^{u_p}}{3}$.

Aussi $0 < u_p \leq 1 \Rightarrow e^0 < e^{u_p} \leq e^1 \;\Rightarrow\; 1 < e^{u_p} \leq e$ car l'exponentielle est croissante.

Alors $0 < u_{p+1} \leq \frac{e^{u_p}}{3} \;\Rightarrow\; 0 < u_{p+1} \leq \frac{e}{3}$ avec $\frac{e}{3} \simeq 0{,}9$ donc $0 < u_{p+1} \leq 1$.

La propriété $0 < u_n \leq 1$ est vraie au rang $p + 1$

<u>Conclusion</u> : Pour tout entier $n \geq 1$, on a $\boldsymbol{0 < u_n \leq 1}$

b) Comme dans la question précédente, on a : $0 < u_n \leq 1 \;\Rightarrow 0 < \frac{e^{u_n}}{n+2} \leq \frac{e}{n+2} < \frac{3}{n+2} \Rightarrow u_{n+1} \leq \frac{3}{n+2}$.

c) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n+2} = 0$ et $0 < u_{n+1} \leq \frac{3}{n+2}$ Donc, d'après le théorème des gendarmes, (u_n) converge (et en l'occurrence elle converge donc vers 0).

5) a) $\boldsymbol{S_n}$ a $\boldsymbol{n}$ termes. Pour chaque terme, pour $k \in \{1; 2; \dots; n\}$, on a $\frac{n}{n^2+k} = \frac{n}{n^2\left(1+\frac{k}{n^2}\right)} = \frac{1}{n\left(1+\frac{k}{n^2}\right)}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) = 1$ donc, par somme de limites $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) = +\infty$.

Par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n\left(1+\frac{k}{n^2}\right)} = 0$ **Chaque terme tend vers 0, on pourrait penser que la somme $\boldsymbol{S_n}$ tendra aussi vers 0… Mais est-ce certain ? Car quand on ajoute une infinité de petits riens…**

b) Le plus petit des termes est celui de plus grand dénominateur, donc $\frac{n}{n^2+n}$.

Le plus grand des termes est celui de plus petit dénominateur, donc $\frac{n}{n^2+1}$.

On a donc, pour chaque terme $\frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2+1}$ et ce pour chacun des n termes, donc, en additionnant :

$n \times \frac{n}{n^2+n} \leq S_n \leq n \times \frac{n}{n^2+1} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\frac{n^2}{n^2+n} \leq S_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}}$ Or $\frac{n^2}{n^2+n} = \frac{n^2}{n^2\left(1+\frac{n}{n^2}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$ et $\frac{n^2}{n^2+1} = \frac{n^2}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}$.

De la même façon qu'à la question précédente, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = 1$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = 1$ et, d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$.

Comme quoi la somme d'une infinité de petits riens peut tendre vers quelque chose de non nul ☺
La leçon à en tirer : la limite d'une somme infinie n'est pas égale à la somme des limites de chaque terme…

Corrigé Exercice 10 : N[elle] Calédonie

1. $d_1 = \frac{1}{2}d_0 + 100 = \mathbf{250}$ et $a_1 = \frac{1}{2}d_0 + \frac{1}{2}a_0 + 70 = \mathbf{445}$

2. a. L'algorithme affiche bien $D = 250$
Mais pour A, il fait le calcul avec D=250 et non D=300 : soit $A = \frac{450}{2} + \frac{250}{2} + 70 = 420$

b. Il suffit d'inverser l'ordre des deux calculs ; en calculant A d'abord, puis D

3. a. $\boldsymbol{e_{n+1}} = d_{n+1} - 200 = \left(\frac{1}{2}d_n + 100\right) - 200 = \frac{1}{2}(e_n + 200) - 100 = \frac{1}{2e_n} + 100 - 100 = \boldsymbol{\frac{1}{2}e_n}$

la suite $(\boldsymbol{e_n})$ est bien géométrique, de raison $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$.

b. On a $e_0 = d_0 - 200 = 100$ donc $e_n = 100 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$
Et par conséquent $d_n = e_n + 200 = 200 + 100 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

c. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $\frac{1}{2} \in]-1;1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 200 + 100 \times 0 = 200$
La suite $(\boldsymbol{d_n})$ est convergente de limite 200

4. a. *Indication : il s'agit juste de vérifier le signe d'un polynôme du 2[d] degré…*
On étudie le signe de : $2x^2 - (x+1)^2 = 2x^2 - x^2 - 2x - 1 = x^2 - 2x - 1$
$\Delta = 8 \Rightarrow x_1 = \frac{2+\sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2} \simeq 2{,}4$ et $x_2 = 1 - \sqrt{2} \simeq -0{,}4$
Le polynôme est positif sur $]-8\,;\,1-\sqrt{2}] \cup [1+\sqrt{2};\,+\infty[$
En particulier, sur $\mathbb{N}$, on a $2n^2 - (n+1)^2 \geq 0$ pour $n \geq 3$, et on a bien $\boldsymbol{2n^2 \geq (n+1)^2}$

b. *__Init.__* : Pour $n = 4$, on a $2^n = 2^4 = 16$ d'une part et $n^2 = 4^2 = 16$ d'autre part. L'inégalité $2^n \geq n^2$est vraie au rang 4.
__Héréd.__ : Si la propriété $2^n \geq n^2$ est vraie pour $n = p$, alors on a : $2^p \geq p^2$.
Alors pour $n = p + 1$, on a :

D'une part	*D'autre part*
$2^n = 2^{p+1} = 2 \times 2^p \geq 2p^2$	$n^2 = (p+1)^2$

Or on a démontré à la question précédente que, pour $p \geq 3$, on avait $2p^2 \geq (p+1)^2$

Donc on a bien $2^n \geq n^2$: La propriété est vérifiée au rang $p + 1$.

__Ccl__ **: Pour tout nombre entier $\boldsymbol{n} \geq$, on a bien $\boldsymbol{2^n \geq n^2}$**

c. pour $n \geq 4$, on a $2^n \geq n^2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n^2} \Rightarrow 0 < \frac{100n}{2^n} \leq \frac{100n}{n^2}$.
Comme $\frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, cela revient à : $\boldsymbol{0 \leq 100\, n \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{100}{n}}$.

d. $a_n = 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340 \Leftrightarrow 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340 \leq a_n \leq \frac{100}{n} + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340$
On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{100}{n} + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340\right) = 0 + 110 \times 0 + 340 = 340$.
donc, d'après le théorème des gendarmes, $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 340}$.