# Corrections Savoirs Si. 4

## Corrigé Exercice 11

**1)** Démontrons que pour tout $n$, $u_{n+1} \leq u_n$.
*Init.* : Pour $n = 0$, on a $u_{n+1} = u_1 = \sqrt{7} \simeq 2{,}6$ et $u_n = u_0 = 5$ donc la propriété $u_{n+1} \leq u_n$ est vraie au rang 0.
*Héréd.* : Si la propriété $u_{n+1} \leq u_n$ est vraie pour $n = p$, alors on a : $u_{p+1} \leq u_p$.
Alors pour $n = p + 1$, on a :
$u_{p+1} \leq u_p \Rightarrow u_{p+1} + 2 \leq u_p + 2 \Rightarrow \sqrt{u_{p+1} + 2} \leq \sqrt{u_p + 2}$ car la racine carrée est croissante.
Donc $u_{p+2} \leq u_{p+1}$ alors la propriété est vraie au rang $p + 1$.
***Ccl*** **: Pour tout nombre entier $n \geq 0$ , on a bien $u_{n+1} \leq u_n$, donc la suite est décroissante.**

**2)** Démontrons que pour tout $n$, $v_{n+1} \geq v_n$.
*Init.* : Pour $n = 1$, on a $v_{n+1} = v_2 = 2 \times 2 - 1 = 3$ et $v_n = v_1 = 2$ La propriété est vraie au rang 1.

*Héréd.* : Si la propriété $v_{n+1} \geq v_n$ est vraie pour $n = p$, alors on a : $v_{p+1} \geq v_p$.
Alors pour $n = p + 1$, on a :
$v_{p+1} \geq v_p \Rightarrow 2v_{p+1} - 1 \geq 2v_p - 1$ donc $v_{p+2} \geq v_{p+1} \Rightarrow$ La propriété est ainsi vérifiée au rang $p + 1$.
***Ccl*** **: Pour tout nombre entier $n \geq 1$ , on a bien $v_{n+1} \geq v_n$ donc la suite est croissante.**

**3) a.** $f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2-2x+1}{x^2+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$
Donc $f'(x)$ **est positive** et s'annule pour $x = 1$. La fonction est bien strictement **croissante** sur $\mathbb{R}$.

**b.** On a : $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f$ est la fonction de la partie A.
Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_n = u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_1 = 1 - \ln(1^2 + 1) = 1 - \ln 2 \simeq 0{,}3$.
donc **la propriété** $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$ **est vraie au rang 0.**
*Héréd.* : Si la propriété $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$ est vraie pour $n = p$, alors on a : $0 \leq u_{p+1} \leq u_p \leq 1$.
Alors pour $n = p + 1$ :
On a montré en A que la fonction $f$ était strictement croissante, donc : $f(0) \leq f(u_{p+1}) \leq f(u_p) \leq f(1)$
Avec $f(0) = 0 - \ln 1 = 0$ et $f(1) = 1 - \ln 2 \leq 1$, on en déduit : $0 \leq u_{p+2} \leq u_{p+1} \leq 1 - \ln 2$
Avec $1 - \ln 2 < 1$, donc par élargissement $0 \leq u_{p+2} \leq u_{p+1} \leq 1$ **La propriété est vraie au rang $p + 1$.**
Conclusion : Pour tout entier naturel $n$, on a $\mathbf{0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1}$.

**La suite $(u_n)$ est décroissante, minorée par 0 et majorée par 1.**

## Pour aller plus loin...

**4)** Montrons que pour tout $n$, $u_{n+1} \leq u_n$.
*Init.* : Pour $n = 0$, on a $u_{n+1} = u_1 = \frac{1}{3} \times 5 + 1 = \frac{8}{3}$ et $u_n = u_0 = 5$. La propriété est vraie au rang 0.
*Héréd.* : Si la propriété $u_{n+1} \leq u_n$ est vraie pour $n = p$, alors on a : $u_{p+1} \leq u_p$.
Alors pour $n = p + 1$, on a :
$u_{p+1} \leq u_p \Rightarrow \frac{1}{3}u_{p+1} + 1 \leq \frac{1}{3}u_p + 1$ alors $u_{p+2} \leq u_{p+1}$ La propriété est alors vérifiée au rang $p + 1$.
***Ccl*** **: Pour tout nombre entier $n \geq 0$ , on a bien $u_{n+1} \leq u_n$, donc la suite est décroissante.**

## Corrigé Exercice 12

**1) a.** Soit $f : x \mapsto x^2 - 2x + 2$. On a pour tout $n$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Étudions alors le sens de variation de $f$ : $f$ est un polynôme du 2[d] degré. Avec $x_S = \frac{b}{2a} = 1$ et $f(1) = 1$, le tableau de variation de $f$ est donc :

| $x$ | $-\infty$ | 1 | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\searrow$ | 1 | $\nearrow$ 2 | $\nearrow$ |

Vous pouvez aussi dériver et chercher le signe de $f'$, mais c'est plus rapide de connaître le sens de variation des PSD

Montrons alors par récurrence l'inégalité $1 \leq u_n \leq 2$ :
*__Init.__* : Pour $n = 0$, on a $u_0 = \frac{3}{2}$ et $1 \leq \frac{3}{2} \leq 2$ La propriété $1 \leq u_n \leq 2$ est vraie au rang 0.
*__Héréd.__* : Si la propriété est vraie pour $n = p$, alors on a : $1 \leq u_p \leq 2$.
Alors pour $n = p + 1$, on a : $u_n = u_{p+1} = f(u_p)$

$$1 \leq u_p \leq 2 \Rightarrow f(1) \leq f(u_p) \leq f(2) \Rightarrow 1 \leq f(u_p) \leq 2 \Rightarrow 1 \leq u_{p+1} \leq 2$$

La propriété $1 \leq u_n \leq 2$ est alors vérifiée au rang $p + 1$.
***Ccl*** **: Pour tout nombre entier $n \geq$ , on a bien $1 \leq u_n \leq 2$**

**b.** D'une part : $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n = u_n^2 - 3u_n + 2$
et d'autre part : $(u_n - 2)(u_n - 1) = u_n^2 - 3u_n + 2$ **L'égalité est vraie.**

**c.** Le polynôme $(x-2)(x-1)$ est positif à l'extérieur de ses racines 1 et 2 et négatif sur $[1; 2]$
Or, on a montré que $u_n \in [1; 2]$ , donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$ : **La suite $(u_n)$ est bien décroissante.**

**2)** On a : $v_{n+1} - v_n = 3\sqrt{v_n} - v_n = \sqrt{v_n}(3 - \sqrt{v_n})$
On cherche le signe de $3 - \sqrt{v_n}$ : on sait que : $0 < v_n \leq 9 \Rightarrow \sqrt{v_n} \leq 3 \Rightarrow 3 - \sqrt{v_n} \geq 0$.
Donc, comme $\sqrt{v_n} \geq 0$ et que $3 - \sqrt{v_n} \geq 0$ on a $v_{n+1} - v_n \geq 0$ et la suite $(v_n)$ est **croissante.**
*(Comme il s'agit d'une suite à termes positifs, vous pouvez aussi partir de $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3\sqrt{v_n}}{v_n} = \frac{3}{\sqrt{v_n}}$ avec $0 < \sqrt{v_n} \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{v_n}} \geq \frac{1}{3}$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n} \geq \frac{3}{3} \Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} \geq 1$ …)*

## Corrigé Exercice 13

**1)** $u_1 = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$ et $u_2 = \frac{\mathbf{23}}{\mathbf{8}}$ **2)** $u_3 \simeq 2{,}99219$ et $u_4 \simeq 2{,}99997$. **3)** La suite $(u_n)$ semble être **croissante.**

**4) a.** On a : $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \left(-\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2}\right) - 3 = -\frac{1}{2}(v_n + 3)^2 + 3(v_n + 3) - \frac{9}{2}$

$$= -\frac{1}{2}v_n^2 - 3v_n - \frac{9}{2} + 3v_n + 9 - \frac{9}{2} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{v_n^2} \quad \text{CQFD}$$

**b.** *__Init.__* : Pour $n = 0$, on a $v_n = v_0 = -1$ donc la propriété $-1 \leq v_n \leq 0$ est vraie au rang 0.
*__Héréd.__* : **Si la propriété est vraie pour $n = p$**, alors on a : $-1 \leq v_p \leq 0$.
Alors pour $n = p + 1$, on a : $v_n = v_{p+1} = -\frac{1}{2}v_p^2$ d'après la question précédente.
$-1 \leq v_p \leq 0 \Rightarrow 1 \geq v_p^2 \geq 0$ car la fonction carré est décroissante sur $\mathbb{R}^-$.
$\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2}v_p^2 \leq 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq v_{p+1} \leq 0$
Or : $-1 \leq -\frac{1}{2}$ donc, par élargissment $-1 \leq v_{p+1} \leq 0$ **la propriété est vérifiée au rang $p + 1$.**
***Ccl*** **: Pour tout nombre entier $n$, on a bien $-1 \leq v_n \leq 0$.**

**c.** $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{2}{v_n}^2 - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right)$

**d.** On a montré que $v_n \leq 0$ donc $\boldsymbol{-v_n \geq 0}$.

De plus $-1 \leq v_n \leq 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}v_n \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}v_n + 1 \leq 1$ donc en particulier $\boldsymbol{\frac{1}{2}v_n + 1 \geq 0.}$

On en déduit donc que $v_{n+1} - v_n \leq 0$ et donc la suite $(v_n)$ est **décroissante**.

Comme $u_n = v_n + 3$, on a $u_{n+1} - u_n = v_{n+1} - v_n \leq 0$ et la suite $(u_n)$ est aussi **décroissante.**