Sujet A : Extrait bac Métropole 2013

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{2+u_n}{1+2u_n}$ pour tout entier n.

On admet que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > 0$

1) a. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

b. Vérifier que pour les valeurs 1, 2, 3 et 4 de n, $u_n - 1$ est du même signe que $(-1)^n$

2) a. Établir que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - 1 = \frac{1-u_n}{1+2u_n}$

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$

3) Pour tout entier naturel n on pose $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+1}$

a. Établir que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \frac{-u_n+1}{3u_n+3}$

b. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{3}$

En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

c. On admet que, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{1+v_n}{1-v_n}$

Exprimer u_n en fonction de n.

Sujet B : Extrait N^elle Calédonie - Nov 2015

On considère deux suites de nombres réels (d_n) et (a_n) définies par $d_0 = 300$, $a_0 = 450$

et, pour tout entier naturel $n \geq 0$ $\begin{cases} d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n + 100 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{2}a_n + 70 \end{cases}$

1. Calculer d_1 et a_1.

2. On souhaite écrire un algorithme qui permet d'afficher en sortie les valeurs de d_n et a_n pour une valeur entière de n saisie par l'utilisateur.
L'algorithme suivant est proposé :

Variables :	n et k sont des entiers naturels D et A sont des réels
Initialisation :	D prend la valeur 300 A prend la valeur 450 Saisir la valeur de n
Traitement :	Pour k variant de 1 à n D prend la valeur $\frac{D}{2}+100$ A prend la valeur $\frac{A}{2}+\frac{D}{2}+70$ Fin pour
Sortie :	Afficher D Afficher A

a. Quels nombres obtient-on en sortie de l'algorithme pour $n = 1$?
Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux obtenus à la question 1. ?

b. Expliquer comment corriger cet algorithme pour qu'il affiche les résultats souhaités.

3. a. Pour tout entier naturel n, on pose $e_n = d_n - 200$. Montrer que la suite (e_n) est géométrique.

b. En déduire l'expression de d_n en fonction de n.