

# Savoirs Fle. 3 : Transformations d'égalités

## Exercice 11: Transformations d'écritures

1) Simplifier les expressions suivantes, quand c'est possible :

$$\begin{array}{lll} A = e^{\ln 2} & B = \ln(e^{-3x}) & C = e^{\ln 5x} \\ D = \ln(1 - 2e^x) & E = \ln(e^{1-2x}) & F = e^{2x+\ln(3)} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{ll} G = e^{\ln(2x+3)} & H = 1 + \ln(e^{3x}) \\ I = \ln(x + e^2) & J = 5xe^{\ln(-2x)} \end{array} \right.$$

2) Transformer les égalités ou inégalités suivantes, en en prenant le logarithme népérien

$$\begin{array}{lll} \text{a) } e^{2x+1} = 2 & \text{b) } e^{3-x} = 3 & \text{c) } \frac{x}{2} < e^{0,5x-5} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{ll} \text{d) } e^{0,1x^2} = x - 1 & \text{e) } e^x(x + 1) \geq 1 \end{array} \right.$$

3) Transformer les égalités ou inégalités suivantes, en en prenant l'exponentielle

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \ln(2 - x) = -4 & \text{b) } \ln(5x) \leq 2x & \text{c) } \ln(x - 1) = x + 1 \end{array} \quad \left| \quad \text{d) } \ln\left(\frac{1}{x+3}\right) > 1 - x \right.$$

4) Simplifier le plus possible les expressions suivantes :

$$\begin{array}{lll} A = \ln\left(\frac{e^x}{2}\right) - \ln(e^{x-3}) & B = e^{\ln 6 - 2 \ln 3} & C = \frac{\ln(e^{2x})}{\ln(e^x(1-x))} \end{array} \quad \left| \quad D = \frac{e^{\ln(2x)-1}}{\ln(2e^{3x})} \right.$$

## Exercice 12: Démontrer des égalités ou inégalités

1) Montrer, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , l'équivalence  $e^{x-1} = \frac{1}{3e^x} \Leftrightarrow 2x = 1 - \ln 3$

2) Montrer que, pour  $x > 0$ , on a :  $1 < \frac{e^x}{x} < e \Leftrightarrow 0 < x - \ln x < 1$

3) On définit les fonctions  $f$  et  $g$  pour  $x > 0$  par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{2x}} \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(f(x))$$

Montrer que, pour tout  $x > 0$ , on a  $g(x) = -\frac{1+4x \ln x}{2x}$

### Un peu plus...

Soit l'inéquation :

$$(I) : \frac{x}{\ln x} - 1 > 2$$

Montrer que résoudre (I) revient à résoudre

$$(I') : 2x + \ln 3 = 1$$

## Exercice 13: Exercice type bac

**Partie 1 :** Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{E}$  par  $g(x) = e^x - xe^x + 1$

1) Étudier les variations de  $g$

2) a. Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet sur  $[0; 2]$  une unique solution. On note  $\alpha$  cette solution.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude  $10^{-2}$  de  $\alpha$ .

c. Démontrer que :  $e^\alpha = \frac{1}{\alpha-1}$

3) Déterminer le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$  sur  $[0; +\infty[$

**Partie 2 :** Soit  $A$  la fonction définie et dérivable sur  $[0; +\infty[$  par  $A(x) = \frac{4x}{e^{x+1}}$

1) Démontrer que, pour tout  $x$  positif non nul,  $A'(x)$  a le même signe que  $g(x)$ , où  $g$  est la fonction définie dans la partie 1.

2) En déduire les variations de la fonction  $A$  sur  $[0; +\infty[$ .

### Partie 3

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{4}{e^x + 1}$ .

On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal. La figure est donnée ci-contre.

Pour tout réel  $x$  positif et non nul, on note  $M$ ,  $P$  et  $Q$  les points de coordonnées  $M(x; f(x))$ ,  $P(x; 0)$  et  $Q(0; f(x))$ .

Démontrer que l'aire du rectangle  $OMPQ$  est maximale lorsque  $M$  a pour abscisse  $\alpha$ .

