

Corrigés Savoirs Fc. 2

Corrigé Exercice 4

Fonction f : définie sur $[-3; 3]$; continue sur $[-3; 3]$ et dérivable sur $[-3; -2[\cup] - 2; 3]$

(car non dérivable en -2)

Fonction g : définie sur $[-3; 3]$; continue sur $[-3; 1[\cup]1; 3]$ (car non continue en 1) et par conséquent dérivable sur $[-3; 1[\cup]1; 3]$

Fonction h : définie sur $[-3; 3]$; continue sur $[-3; 3]$ et dérivable sur $] - 3; 1, 5[\cup]1, 5; 3]$

Fonction i : définie sur $[-3; 0] \cup [1; 3]$; continue sur $[-3; 0] \cup [1; 3]$ et dérivable sur $[-3; 0] \cup [1; 3]$

Corrigé Exercice 5

1) a) sur $[-7; -2]$:

- f est **continue**
- f est **strictement croissante**
- on a $f(-7) < 3$ et $f(-2) > 3$

donc $3 \in [f(-7); f(-2)]$
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 3$ a donc une seule solution sur $[-7; -2]$

sur $[-2; 1]$:

- f est **continue**
- f est **constante**
- on a $f(x) = 4 > 3$

donc $3 \notin [f(-2); f(1)]$
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 3$ n'admet pas de solution sur $[-2; 1]$

sur $[1; 4]$:

- f est **continue**
- f est **strictement décroissante**
- on a $f(1) > 3$ et $f(4) < 3$. donc

$3 \in [f(4); f(1)]$
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 3$ a donc une seule solution sur $[1; 4]$

L'équation $f(x) = 3$ a donc **en tout deux solutions** : $\alpha \in] - 7; -2[$ et $\beta \in]1; 4[$.

b) sur $[-7; -2]$:

- f est **continue**
 - f est **strictement croissante**
 - $f(-7) < -2$ et $f(-2) > -2$
- donc $-2 \in [f(-7); f(-2)]$
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -2$ a donc une seule solution sur $[-7; -2]$

sur $[-2; 1]$:

- f est **continue**
 - f est **constante**
 - on a $-2 \notin [f(-2); f(1)]$
- D'après le théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $f(x) = -2$ n'admet pas de solution sur $[-2; 1]$

sur $[1; 4]$:

- f est **continue**
 - f est **strictement décroissante**
 - on a $-2 \notin [f(4); f(1)]$
- D'après le théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $f(x) = -2$ n'admet pas de solution sur $[1; 4]$

Donc au final l'équation $f(x) = -2$ n'a qu'une seule solution, qui se situe dans l'intervalle $] - 7; - 2[$.

c) L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 4$ est $S = [-2; 1]$, car f est constante et égale à 4 sur cet intervalle.

d) f est continue sur $[-7; 2]$ mais pour tout $x \in [-7; 4]$, on a $f(x) \geq -3$ donc l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = -6$ est $S = \emptyset$.

2) a) $e^{0,4} - 2 \simeq -0,5$ donc $f(2) < 2$.

Il n'y a pas de solution sur l'intervalle $[0; 2]$

f est **continue et strictement décroissante** sur $[-10; 0]$, avec $f(-10) > 2$ et $f(0) < 2$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet une **unique solution** α sur l'intervalle $[-10; 1]$.

b) à la calculatrice, balayages successifs : $\alpha \simeq -3,72$

Un peu plus...

- 1) a)** La fonction f est **continue et strictement croissante** sur $[0; 5]$, avec $f(0) < 9$ et $f(5) > 9$
(autre rédaction possible : $9 \in [f(0); f(5)]$)
D'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $f(x) = 9$ admet une **unique solution** α sur l'intervalle $[0; 5]$.
- b)** Balayage : $\alpha \simeq 0,65$

Corrigé Exercice 6

- 1) a)** $f(0) = 1$ et $f(1) = 1 - 3 + 1 = -1$.

x	0	1
$3x$	0	+
$x - 2$		-
$f'(x)$	0	-
$f(x)$	1	$\searrow$ -1

- b)** On a $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$

- c)** f est **continue et strictement décroissante** sur $[0; 1]$ et on a $f(0) > 0$ et $f(1) < 0$, donc $0 \in [f(1); f(0)]$

D'après le **thm des valeurs intermédiaires**, l'équation $f(x) = 0$ a donc une solution et une seule sur l'intervalle $[0; 1]$.

- 2) a.** La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0; 3]$, avec $f(0) = 1$ et $f(3) \simeq 9,3$ donc $6 \in [f(0); f(3)]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 6$ admet une unique solution α sur $[0; 3]$.

- b.** $\alpha \simeq 2,17$

- 3) a)** $f'(x) = 3x^2 + 12x + 9 = 0$
avec $\Delta = 36$ donc $x_1 = -1$ et $x_2 = -3$
On a $f(-1) = -1$ et $f(-3) = 3$

x	$-\infty$	-4	-3	-1	1	$+\infty$			
$f'(x)$	+		+	0	-	0	+		+
$h(x)$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	19	$\nearrow$

- b)** f est continue sur $\mathbb{R}$, elle est strictement croissante sur $[-1; 1]$

avec $f(-1) < 10$ et $f(1) > 10$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, **l'équation $f(x) = 10$ a une unique solution sur $[-1; 1]$**

Par ailleurs, sur $[-4; -1]$, on a $f(x) \leq 3$ donc l'équation $f(x) = 0$ **n'y a aucune solution**.

- c)** Pour $m \in]3; 19]$ l'équation $f(x) = m$ a **une solution unique** sur $[-4; 1]$

Pour $m \in]-1; 3]$ l'équation a **trois solutions** sur $[-4; 1]$

Pour $m = -1$ ou pour $m = 3$, l'équation a **deux solutions** sur $[-4; 1]$

Et pour $m < -1$ ou $m > 19$, l'équation n'a **pas de solutions**

Un peu plus...

- 4) ATTENTION !** absolument pas besoin du TVI pour cet exercice ☺ il s'agit d'une équation qu'on sait parfaitement résoudre !!! Pour $x \neq 0$, on a $x + \frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$ avec $\Delta = 5$ et donc deux solutions $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \simeq 2,6$ et $x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \simeq 0,4$ et c'est fini...

Bon, comme vous avez du foncer sur le TVI, je vous mets quand même la correction... sur la page suivante

h est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme somme de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}^*$

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2} \quad \text{On a } h(-1) = -2 \text{ et } h(1) = 2$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$x^2 - 1$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	
x^2	$+$	$ $	$+$	0	$+$	$ $	$+$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	$\parallel$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$\parallel$	$\searrow$	2	$\nearrow$

Sur $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$ la fonction h est strictement décroissante et on a $h\left(\frac{1}{4}\right) > 3$ et $h(1) < 3$. D'après le théorème des **valeurs intermédiaires**, l'équation $h(x) = 3$ y admet une **unique solution** x_1

De même, sur l'intervalle $[1; 4]$, h est strictement croissante et $h(1) < 3$ et $h(4) > 3$, donc l'équation $h(x) = 3$ y admet une **unique solution** x_2

À la calculatrice, on trouve $x_1 \simeq \mathbf{0,4}$ (car $h(0,38) > 3$ et $h(0,39) < 3$)
et $x_2 \simeq \mathbf{2,6}$ (car $h(2,61) < 3$ et $h(2,62) > 3$)

Un peu plus long, non ?