

Sujet type bac

Entraînement 1

Une association décide d'ouvrir un centre de soin pour les oiseaux sauvages victimes de la pollution. Leur but est de soigner puis relâcher ces oiseaux une fois guéris.

Le centre ouvre ses portes le 1^{er} janvier 2013 avec 115 oiseaux.

Les spécialistes prévoient que 40% des oiseaux présents dans le centre au 1^{er} janvier d'une année restent présents le 1^{er} janvier suivant et que 120 oiseaux nouveaux sont accueillis dans le centre chaque année.

On s'intéresse au nombre d'oiseaux présents dans le centre au 1^{er} janvier des années suivantes.

La situation peut être modélisée par une suite (u_n) admettant pour premier terme $u_0 = 115$, le terme u_n donnant une estimation du nombre d'oiseaux l'année $2013 + n$.

1.
 - a. Calculer u_1 et u_2 . Avec quelle précision convient-il de donner ces résultats ?
 - b. Donner, pour tout entier naturel n , l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n .
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 200$.
 - a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,4. Préciser v_0 .
 - b. Exprimer, pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n .
 - c. En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = 200 - 85 \times 0,4^n$.
 - d. La capacité d'accueil du centre est de 200 oiseaux. Est-ce suffisant ? Justifier la réponse.

Entraînement 2

La médiathèque d'une petite ville a ouvert ses portes le 2 janvier 2013 et a enregistré 2 500 inscriptions en 2013.

Elle estime que, chaque année, 80% des anciens inscrits renouveleront leur inscription l'année suivante et qu'il y aura 400 nouveaux adhérents.

On modélise cette situation par une suite numérique (a_n) .

On note $a_0 = 2500$ le nombre d'inscrits à la médiathèque en 2013 et a_n représente le nombre d'inscrits à la médiathèque pendant l'année $2013 + n$.

1.
 - a. Calculer a_1 et a_2 .
 - b. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a la relation $a_{n+1} = 0,8 \times a_n + 400$.
2. On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = a_n - 2000$.
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 500$ et de raison $q = 0,8$.
 - b. En déduire que le terme général de la suite (a_n) est $a_n = 500 \times 0,8^n + 2\,000$.
 - c. Calculer la limite de la suite (a_n) .
 - d. Que peut-on en déduire pour le nombre d'adhérents à la médiathèque si le schéma d'inscription reste le même au cours des années à venir ?

Entraînement 3

Afin d'entretenir une forêt vieillissante, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5% des arbres existants et de replanter 3 000 arbres.

Le nombre d'arbres de cette forêt est modélisé par une suite notée u où u_n désigne le nombre d'arbres au cours de l'année $(2013 + n)$.

En 2013, la forêt compte 50 000 arbres.

1. a. Déterminer le nombre d'arbres de la forêt en 2014.

b. Montrer que la suite u est définie par $u_0 = 50\,000$ et pour tout entier naturel n par la relation :

$$u_{n+1} = 0,95u_n + 3\,000.$$

2. On considère la suite v définie pour tout entier naturel n par $v_n = 60\,000 - u_n$.

a. Montrer que la suite v est une suite géométrique de raison 0,95. Déterminer son premier terme.

b. Exprimer v_n en fonction de n .

c. En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = 10000(6 - 0,95^n)$.

d. Déterminer la limite de la suite u .

e. Interpréter le résultat précédent.

3. a. Résoudre à l'aide de la calculatrice $u_n > 57\,000$

b. Interpréter ce résultat.

Entraînement 4*

On a observé l'évolution des inscriptions dans le club de gymnastique d'une ville.

Chaque année, 30% des personnes inscrites au club de gymnastique l'année précédente renouvellent leur inscription au club. De plus, chaque année, 10% des habitants de la ville qui n'étaient pas inscrits au club l'année précédente s'y inscrivent.

On appelle n le nombre d'années d'existence du club.

On note g_n la proportion de la population de la ville inscrite au club de gymnastique lors de l'année n et p_n la proportion de la population qui n'est pas inscrite.

La première année de fonctionnement du club (année « zéro »), 20% des habitants de la ville se sont inscrits.

On a donc $g_0 = 0,2$.

1. Soit n un entier naturel. Que vaut la somme $g_n + p_n$?

2. a. Justifier que, pour tout entier naturel n , $g_{n+1} = 0,3g_n + 0,1p_n$

b. En déduire que, pour tout entier naturel n , $g_{n+1} = 0,2g_n + 0,1$.

3. Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = g_n - 0,125$.

Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

4. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

5. Montrer que pour tout entier n , $g_n = 0,125 + 0,075 \times 0,2^n$.

Comment la proportion de la population de la ville inscrite au club de gymnastique évolue-t-elle au cours des années ?

Vers le supérieur

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n , par la relation $u_{n+1} = au_n + b$ (a et b réels non nuls tels que $a \neq 1$).

On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$

1. Démontrer que, la suite (v_n) est géométrique de raison a .

2. En déduire que si a appartient à l'intervalle $] -1 ; 1[$, alors la suite (u_n) a pour limite $\frac{b}{1-a}$