

# 1. Corrections

1. a. Étudier la limite de  $f$  en 0.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + \ln x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0^+ \end{cases} \quad \text{donc par quotient de limites, on a } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

b. Par croissances comparées, on sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$$\text{On a } f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{x} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases} \quad \text{donc, par somme et produit de limites, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

c. L'axe des ordonnées est une asymptote verticale à la courbe  $\mathcal{C}$  et l'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe  $\mathcal{C}$  en  $+\infty$

$$2. a. f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x(1 + \ln(x))}{(x^2)^2} = \frac{x - 2x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{-x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{x(-1 - 2 \ln x)}{x^4} = \frac{-1 - 2 \ln(x)}{x^3} \quad \text{CQFD}$$

$$b \& c. -1 - 2 \ln(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x < e^{-\frac{1}{2}} \quad \text{avec } f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1 + \ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)}{\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{e^{-1}} = \frac{e}{2}$$

| $x$          | 0         | $e^{-\frac{1}{2}}$ | $+\infty$     |            |          |
|--------------|-----------|--------------------|---------------|------------|----------|
| $-1-2\ln(x)$ |           | +                  | 0             | -          |          |
| $x^3$        | 0         | +                  |               | +          |          |
| $f'(x)$      |           | +                  | <b>0</b>      | -          |          |
| $f(x)$       | $-\infty$ | $\nearrow$         | $\frac{e}{2}$ | $\searrow$ | <b>0</b> |

3. a. On recherche le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 + \ln(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$

Le seul point d'intersection de  $\mathcal{C}$  avec l'axe des abscisses est le point de coordonnées  $P\left(\frac{1}{e}; 0\right)$

Et oui !!! ce n'était pas du Tvi !!!

b.

|        |   |               |           |   |
|--------|---|---------------|-----------|---|
| $x$    | 0 | $\frac{1}{e}$ | $+\infty$ |   |
| $f(x)$ |   | -             | 0         | + |

Ne pas oublier de vérifier tous les résultats avec la la courbe !!!

## 2. Corrections

**Partie A - 1.**  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty \\ \lim_{Y \rightarrow -\infty} e^Y = 0 \end{cases}$  et, par composées de limites, on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$

donc, par somme,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^{-x} = 1$  et par inverse de limites  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 1$

La droite d'équation  $y = 1$  est asymptote à la courbe  $\mathcal{C}_1$  en  $+\infty$

De même, par composées de limites, on a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{Y \rightarrow +\infty} e^Y = +\infty$

donc, par somme,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + e^{-x} = +\infty$  et par inverse de limites  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = 0$

La droite d'équation  $y = 0$ , c'est-à-dire l'axe des abscisses, est asymptote à la courbe  $\mathcal{C}_1$  en  $-\infty$

**2.**  $f_1(x) = \frac{e^x}{e^x} \times \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x + e^{x-x}} = \frac{e^x}{e^x + 1}$  CQFD

**3.**  $f'_1(x) = \frac{e^x(e^x+1) - e^x \times e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

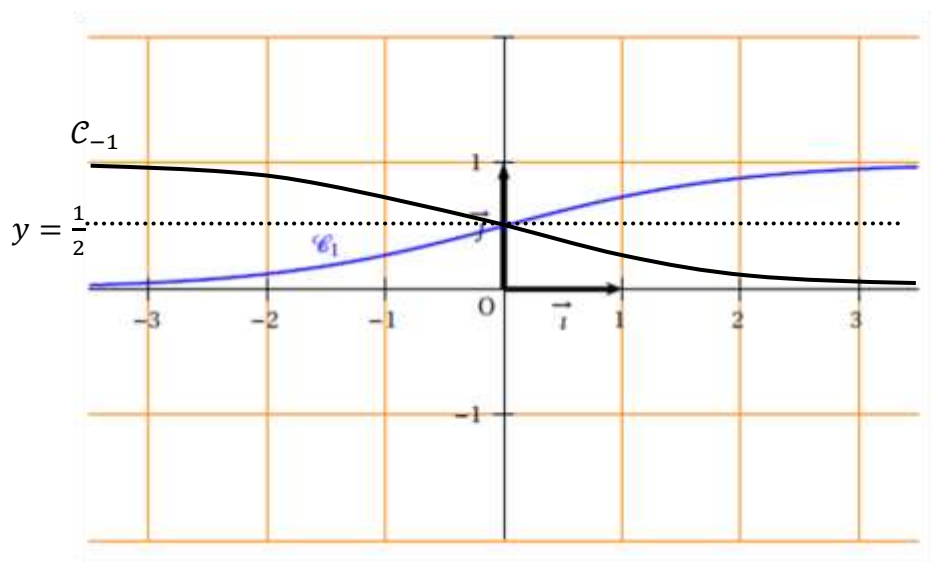
La fonction exponentielle, comme les carrés, sont positifs, donc la dérivée  $f'_1$  est strictement positive pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Par conséquent, la fonction  $f_1$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

**Partie B - 1.**  $f_1(x) + f_{-1}(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{1}{1+e^x} = \frac{e^x}{e^x+1} + \frac{1}{1+e^x} = \frac{e^x+1}{1+e^x} = 1$  CQFD

**2.** Le point  $K$  a pour abscisse  $x$  et pour ordonnée  $y_K = \frac{f_1(x) + f_{-1}(x)}{2} = \frac{1}{2}$

Il appartient donc bien à la droite d'équation  $y = \frac{1}{2}$

**3.** On trace la courbe  $\mathcal{C}_{-1}$  par symétrie axiale de la courbe  $\mathcal{C}_1$  par rapport à la droite d'équation  $y = \frac{1}{2}$



### Partie C

**1. VRAI** Pour toutes valeurs de  $k$  on a  $e^{-kx} > 0 \Rightarrow 1 + e^{-kx} > 1$

donc, par passage à l'inverse  $0 < \frac{1}{1+e^{-kx}} < 1$

Donc  $0 < f_k(x) < 1$  : la représentation graphique de la fonction  $f_k$  est strictement comprise entre les droites d'équation  $y = 0$  et  $y = 1$

**2. FAUX**  $f'_k(x) = \frac{-(-ke^{-kx})}{(1+e^{-kx})^2} = \frac{ke^{-kx}}{(1+e^{-kx})^2}$  Le signe de  $f'_k$  dépend du signe de  $k$  : si  $k > 0$ , la dérivée est strictement positive et donc la fonction est strictement croissante, mais si  $k < 0$ , la dérivée est strictement négative et donc la fonction est strictement décroissante

**3. VRAI** Pour tout réel  $k \geq 10$ , on a  $-kx \leq -10x$  donc en particulier  $-k \times \frac{1}{2} \leq -5$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{k}{2}} \leq e^{-5} \Leftrightarrow 1 + e^{-\frac{k}{2}} \leq 1 + e^{-5} \Leftrightarrow \frac{1}{1+e^{-\frac{k}{2}}} \geq \frac{1}{1+e^{-5}} \Leftrightarrow f_k\left(\frac{1}{2}\right) \geq \frac{1}{1+e^{-5}}$$

Or  $\frac{1}{1+e^{-5}} \approx 0,9933$  donc on a bien  $f_k\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0,99$

# 3. Corrections

## Partie A

$$1. \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{cases} \quad \text{et, par produit de limites, on a } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Par ailleurs  $f(x) = xe^x + e^x$ .

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \quad (\text{croissances comparées}) \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{cases} \quad \text{et, par somme de limites, on a } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$2. f'(x) = 1e^x + (x+1)e^x = (1+x+1)e^x = (x+2)e^x$$

CQFD

3.

| $x$     | $-\infty$ | $-2$                        | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----------------------------|-----------|
| $x+2$   | $-$       | $0$                         | $+$       |
| $e^x$   | $+$       | $ $                         | $+$       |
| $f'(x)$ | $-$       | $0$                         | $+$       |
| $f(x)$  | $0$       | $\searrow -e^{-2} \nearrow$ | $+\infty$ |

## Partie B

$$1. a. g_m(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 - me^{-x} = 0 \Leftrightarrow x + 1 = me^{-x} \Leftrightarrow (x+1)e^x = m \Leftrightarrow f(x) = m \quad \text{CQFD}$$

b. D'après la question précédente, chercher le nombre points d'intersection de la courbe  $\mathcal{C}_m$  avec l'axe des abscisses revient à chercher le nombre de solutions de l'équation  $g_m(x) = 0$ , c'est-à-dire de  $f(x) = m$

D'après le tableau de variation de  $f$  (en application du Tvi) :

Si  $m < -e^{-2}$  il n'y a **aucun** point d'intersection

Si  $m = -e^{-2}$  il y a **un seul** point d'intersection

Si  $-e^{-2} < m < 0$  il y a **deux** points d'intersections

Si  $m \geq 0$  il y a **un seul** point d'intersection

2. La courbe 1 n'ayant aucun point d'intersection avec  $(Ox)$ , cela indique d'après la question précédente que  $m < -e^{-2}$  : il s'agit donc de la **courbe  $\mathcal{C}_{-e}$**

La courbe  $\mathcal{C}_0$  correspond à la fonction  $g_0(x) = x + 1$  et est donc une droite : il s'agit de la **courbe 2**

La courbe 3 correspond donc à  $\mathcal{C}_e$  (pour  $m \geq 0$ , il n'y a bien qu'un seul point d'intersection)

$$3. g_m(x) - y = x + 1 - me^{-x} - (x + 1) = -me^{-x}$$

L'exponentielle étant toujours positive,  $g_m(x) - y$  est du signe de  $-m$ .

Si  $m > 0$ ,  $g_m(x) - y < 0$  et la **courbe  $\mathcal{C}_m$  est en dessous de la droite  $\mathcal{D}$**

Si  $m < 0$ ,  $g_m(x) - y > 0$  et la **courbe  $\mathcal{C}_m$  est au dessus de la droite  $\mathcal{D}$**

$$4. \begin{cases} \lim_{a \rightarrow +\infty} 1 - a = -\infty \\ \lim_{Y \rightarrow -\infty} -2e^Y = 0 \end{cases} \quad \text{par composées de limites, on a } \lim_{a \rightarrow +\infty} -2e^{1-a} = 0$$

$$\text{donc, par somme : } \lim_{a \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(a) = 2e$$

# 4. Corrections

## Partie A

1. Dans les 3 cas, le tableau de variation de  $f$  est (où  $\alpha \simeq -0,6$ ) :

|        |    |            |            |
|--------|----|------------|------------|
| $x$    | -3 | $\alpha$   | 4          |
| $f(x)$ |    | $\searrow$ | $\nearrow$ |

Quand aux tableaux de signes des fonctions correspondant aux courbes  $\mathcal{C}_2$  :

|                    |    |          |   |  |
|--------------------|----|----------|---|--|
| <i>Situation 1</i> |    |          |   |  |
| $x$                | -3 | $\alpha$ | 4 |  |
| Dérivée ?          | -  | 0        | + |  |

|                    |    |    |   |  |
|--------------------|----|----|---|--|
| <i>Situation 2</i> |    |    |   |  |
| $x$                | -3 | -1 | 4 |  |
| Dérivée ?          | -  | 0  | + |  |

|                    |    |   |   |  |
|--------------------|----|---|---|--|
| <i>Situation 3</i> |    |   |   |  |
| $x$                | -3 |   | 4 |  |
| Dérivée ?          |    | + |   |  |

Seule la situation 1 correspond

2. On a pour équation de  $\Delta$  :  $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

or, d'après les coordonnées des points  $A$  et  $B$ , on a  $f(0) = 2$  et  $f'(0) = 1$

Donc :  $y = 1x + 2 \Leftrightarrow y = x + 2$

3. a.  $f(0) = 2 \Leftrightarrow e^{-0} + a \times 0 + b = 2 \Leftrightarrow 1 + b = 2 \Leftrightarrow b = 1$  donc  $f(x) = e^{-x} + ax + 1$

b.  $f'(x) = -e^{-x} + a$  et  $f'(0) = 1 \Leftrightarrow -e^0 + a = 1 \Leftrightarrow -1 + a = 1 \Leftrightarrow a = 2$

On a donc  $f(x) = e^{-x} + 2x + 1$

4. On a  $f'(x) = -e^{-x} + 2$

et  $2 - e^{-x} \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x} \leq 2 \Leftrightarrow -x \leq \ln 2 \Leftrightarrow x \geq -\ln 2$

Avec  $f(-\ln 2) = e^{\ln 2} + 2(-\ln 2) + 1 = 3 - 2 \ln 2$

|         |           |                                     |           |
|---------|-----------|-------------------------------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-\ln 2$                            | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | -         | 0                                   | +         |
| $f(x)$  |           | $\searrow$ $3 - 2 \ln 2$ $\nearrow$ |           |

5.

$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty \\ \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0 \end{cases}$  et, par composée de limites, on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ . Donc, par somme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

# 5. Corrections

1.  $f'(x) = e^{2x} + (x - 1)(2e^{2x}) - 1 = (1 + 2x - 2)e^{2x} - 1 = (2x - 1)e^{2x} - 1$

On a alors  $f'(0) = (0 - 1)e^0 - 1 = -1 - 1 = -2$

et  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty \end{cases}$  (composée de limites) et, par produit et somme de limites, on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$

2.  $f''(x) = 2e^{2x} + (2x - 1)(2e^{2x}) = (2 + 4x - 2)e^{2x} = 4xe^{2x}$

3.

|          |            |    |                      |
|----------|------------|----|----------------------|
| $x$      | $-\infty$  | 0  | $+\infty$            |
| $4x$     | -          | 0  | +                    |
| $e^{2x}$ | +          |    | +                    |
| $f''(x)$ | -          | 0  | +                    |
| $f'(x)$  | $\searrow$ | -2 | $\nearrow$ $+\infty$ |

Sur  $[0; +\infty[$ , la fonction  $f'$  est continue et strictement croissante, avec  $f'(0) < 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) > 0$ .

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $f'(x) = 0$  n'a qu'une seule solution sur  $[0; +\infty[$

4. a. On a  $f(0) = (-1)e^0 - 1 = -2$  et, d'après la question précédente, on a :

|         |    |            |                      |
|---------|----|------------|----------------------|
| $x$     | 0  | $x_0$      | $+\infty$            |
| $f'(x)$ | -  | 0          | +                    |
| $f(x)$  | -2 | $\searrow$ | $\nearrow$ $+\infty$ |

Sur  $[0; x_0]$ , la fonction  $f$  est strictement décroissante, donc  $f(x) \leq f(0) \Leftrightarrow f(x) \leq -2$   
 **$f$  est bien négative sur  $[0; x_0]$**

b.  $f(2) = (2 - 1)e^4 - 1 - 2 = e^4 - 3 > 0$

Sur  $[x_0; +\infty[$ , la fonction  $f$  est continue et strictement croissante, avec  $f(x_0) < 0$  et  $f(2) > 0$ .

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $f(x) = 0$  n'a qu'une seule solution sur  $[x_0; +\infty[$

Comme  $f$  est strictement négative sur  $[0; x_0]$  l'équation  $f(x) = 0$  n'y a pas de solution.

Donc la fonction  $f$  s'annule bien que pour une unique valeur sur  $[0; +\infty[$

À la calculatrice, on trouve  $\alpha \approx 1,20$