

Savoir Sr.3 - R^t par récurrence : Sommes et autres

Entraînement 1

On définit la suite (u_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $u_n = 3^n$ et on pose :

$$S_n = \sum_{p=0}^{p=n} u_p$$

- a) Justifier qu'on a : $S_n = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n$

- b) **Montrer par récurrence**, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\mathbf{s}_n = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1)$

Entraînement 2

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1)$. On a donc :

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} 2k + 1$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $S_n = (n + 1)^2$

Entraînement 3

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $S_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$. On a donc :

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} 2^k$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $S_n = 2^{n+1} - 1$

Entraînement 4

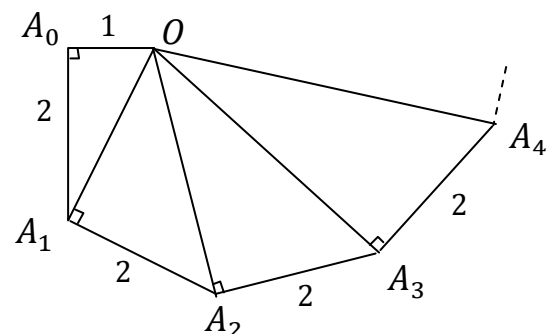
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $10^n - 1$ est un **multiple de 9**

Entraînement 5*

Sur la figure, on a :

- $OA_0 = 1$
- $A_0A_1 = A_1A_2 = \dots = 2$
- Les triangles $OA_0A_1, OA_1A_2, \dots$ sont rectangles

Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $OA_n = \sqrt{4n+1}$



Corrections Savoir Sr.3

Corrigé Entraînement 1

a) $S_n = \sum_{p=0}^{p=n} u_p = u_0 + u_1 + \dots + u_n = 3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n$

b) Initialisation : pour $n = 0$ on a $s_n = s_0 = 1$ et $\frac{1}{2}(3^{n+1} - 1) = \frac{1}{2}(3 - 1) = 1$ **Vraie au rang 0**

Hérédité : Si la propriété est vraie pour $n = p$ alors on a :

$$S_p = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^p = \frac{1}{2}(3^{p+1} - 1)$$

Alors pour $n = p + 1$, on a :

$$\begin{aligned} S_n = S_{p+1} &= 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^p + 3^{p+1} = S_p + 3^{p+1} = \frac{1}{2}(3^{p+1} - 1) + 3^{p+1} \\ &= \frac{3}{2} \times 3^{p+1} - \frac{1}{2} = \frac{3^{p+2}}{2} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Et $\frac{1}{2}(3^{n+1} - 1) = \frac{1}{2}(3^{p+1+1} - 1) = \frac{3^{p+2}}{2} - \frac{1}{2}$

Alors la propriété est vraie au rang $n = p + 1$

Conclusion : Donc pour tout entier naturel n , on a : $S_n = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1)$

Corrigé Entraînement 2

Initialisation : pour $n = 0$, on a $S_n = S_0 = 1$ et $(n + 1)^2 = 1^2 = 1$ **La propriété est vraie au rang 0**

Hérédité : Si la propriété est vraie pour $n = p$ alors : $S_p = 1 + 3 + 5 + \dots + (2p + 1) = (p + 1)^2$

Alors pour $n = p + 1$, on a :

$$\begin{aligned} S_n = S_{p+1} &= 1 + 3 + 5 + \dots + (2p + 1) + (2(p + 1) + 1) = S_p + 2p + 3 \\ &= (p + 1)^2 + 2p + 3 = p^2 + 4p + 4 \end{aligned}$$

Et : $(n + 1)^2 = (p + 2)^2 = p^2 + 4p + 4$

Alors la propriété est vraie au rang $n = p + 1$

Conclusion : Donc pour tout entier naturel n , on a : $S_n = (n + 1)^2$

Corrigé Entraînement 3

Initialisation : pour $n = 0$, on a $S_n = 1$ et $2^{n+1} - 1 = 2 - 1 = 1$ **La propriété est vraie au rang 0**

Hérédité : Si la propriété est vraie pour $n = p$ alors on a : $S_p = 2^{p+1} - 1$

Alors pour $n = p + 1$, on a : $S_n = S_{p+1} = S_p + 2^{p+1} = 2^{p+1} - 1 + 2^{p+1} = 2 \times 2^{p+1} = 2^{p+2}$

Et : $2^{n+1} - 1 = 2^{p+2} - 1$

Alors la propriété est vraie au rang $n = p + 1$

Conclusion : Donc pour tout entier naturel n , on a :

$$S_n = 2^{n+1} - 1$$

Corrigé Entraînement 4

Initialisation : pour $n = 0$, on a $10^n - 1 = 1 - 1 = 0$ qui est un multiple de 9 (entre autres...)

La propriété est vraie au rang 0

Hérédité : Si la propriété est vraie pour $n = p$ alors on a : $10^p - 1 = 9k$ où $k \in \mathbb{Z}$

Alors pour $n = p + 1$, on a : $10^n - 1 = 10^{p+1} - 1 = 10 \times 10^p - 1 = 10(1 + 9k) - 1$
 $= 10 + 90k - 1 = 9 + 90k = 9(1 + 10k)$ qui est un multiple de 9.

Alors la propriété est vraie au rang $n = p + 1$

Conclusion : Donc pour tout entier naturel n ,

le nombre $10^n - 1$ est un multiple de 9

Corrigé Entraînement 5

2) Initialisation : Pour $n = 0$, on a $OA_0 = 1$ et $\sqrt{4n + 1} = \sqrt{1} = 1$ **La propriété est vraie au rang 0**

Hérédité : Si la propriété est vraie pour $n = p$ alors on a : $OA_p = \sqrt{4p + 1}$

Alors pour $n = p + 1$, on a :

$OA_n^2 = OA_{p+1}^2 = OA_p^2 + A_p A_{p+1}^2$ (Dans le triangle $OA_p A_{p+1}$ rectangle en A_p , thm de Pythagore)

$$\Rightarrow OA_n^2 = \sqrt{4p + 1}^2 + 4 = 4p + 5 \Rightarrow OA_n = \sqrt{4p + 5}$$

Et $\sqrt{4n + 1} = \sqrt{(4(p + 1) + 1)} = \sqrt{4p + 5}$ **Alors la propriété est vraie au rang $n = p + 1$**

Conclusion : Donc pour tout entier naturel n , on a :

$$OA_n = \sqrt{4n + 1}$$