Chap 2

Matrices

(1ère partie)

Savoir M. 2 : Opérations sur les matrices

Exercice 7 : Calculs directs

1) Multiples et sommes

a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & -2 \\ 6 & -4 & -3 \end{pmatrix}$.

Calculer $A + B$; $2A$; $-3B$ et $2A - 3B$

b) Soit $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Calculer $10I - 7J$

c) Soit $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.
Calculer $C - D$

d) On a $S = \begin{pmatrix} 2x & 5 \\ 8 & -3x \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} y & 2y-1 \\ 4 & -y \end{pmatrix}$.

Déterminer le couple de réels $(x\ ;\ y)$ tel que
$S - T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

2) Produits

a) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Calculer AB

b) Soit $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 6 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Calculer CD

c) Soit $E = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.
Calculer EF

d) Soit $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Calculer ST puis TS

e) Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$

Calculer MP

f) Soit a un réel. Calculer et simplifier :
$A = \begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3a \\ -a & 5 \end{pmatrix}$

3) Résultats étonnants

On donne $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

a) Calculer AB, BA, AC puis CA… Conclusion ?

b) Calculer CD… Conclusion ?

c) Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; $S = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$. Calculer MS puis MT… Conclusion ?

4) Carrés

On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$. Calculer A^2, B^2 et C^2

Exercice 8 : Contextes

1) Trois candidats ont obtenu les notes suivantes dans 3 matières :

	Maths	Physique	SVT
Candidat 1	17	16	12
Candidat 2	19	19	15
Candidat 3	14	15	18

Les coefficients des disciplines sont 9 pour les Maths, et 6 pour la Physique et la SVT…
Utiliser le calcul matriciel pour calculer la moyenne (à 0,1 près) de chaque candidat…

2) Des chercheurs font une étude sur la propagation d'un virus ORL. Ils ont établi que :

- Si un sujet est sain, il a 10% de risques de tomber malade le lendemain
- Si un sujet est malade, il a 40% de guérir le lendemain.

On note « état 1 » le fait de ne pas être malade (sujet sain ou sujet guéri) et « état 2 » le fait d'être malade.

a) Représenter par un graphe la situation

b) On donne la matrice de transition $A = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$ où le coefficient a_{ij} est la probabilité de passer de l'état j à l'état i le lendemain .
L'étude démarre au 1er jour sur une population de 1700 personnes saines et 300 personnes malades.
Quelle sera la répartition entre sains et malades au bout d'un jour ? au bout de 2 jours ?

c) Calculer A^2. Comment trouver directement le nombre de personnes saines et de personnes malade au bout de 2 jours à l'aide de cette matrice ?

Exercice 9 : Vérifier qu'on a bien compris

1) Dans chaque cas, calculer $A+B$; $A-B$; $2A$ et $2A-3B$

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$

2) Calculer :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \\ 0 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

3) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$. Trouver deux matrices carrées B d'ordre 2 telles que $AB = 0$

4) Un élève qui suit un cours de programmation informatique a 80 % de chance de poursuivre son cours le prochain semestre et 20 % d'entreprendre un nouveau cours. Un élève qui ne suit pas un cours d'informatique a 30 % de chances d'entreprendre le cours de programmation et 70 % de chances de ne pas entreprendre ce cours.
Pendant le 1er semestre, 600 élèves suivaient le cours de programmation informatique et 240 élèves ne suivaient pas ce cours.
Utiliser les matrices pour déterminer la distribution pour les deux prochains semestres (ne pas hésiter à faire un diagramme).

Exercice 10 : Matrice en fonction de…

1) On donne $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice C telle que $A + C = B$

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Montrer que A peut s'écrire sous la forme $A = sI + tB$ où s et t sont des réels à déterminer.

3) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$.

Dans chaque cas, déterminer la matrice M de format 2×2 telle que :

a) $2M + A = 5B$ **b)** $M + B = 3M - 2A$

4*) On donne $M = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer deux réels *a* et *b* tels que $M = aI_3 + bJ$

b) Vérifier que $J \times J = 3J$

c) En déduire $M \times M + 5M = -4I_3$

d) Déterminer une matrice P telle que $M \times P = I_3$

5*) Soit M la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & 6 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

a) Montrer que $M = I_3 + P$ où I_3 est la matrice unité d'ordre 3 et P une matrice carrée d'ordre 3 qui vérifie $P^2 = O$ (matrice nulle d'ordre 3)

b) En déduire (sans calculer le produit) M^2

Exercice 11 : Vérifier qu'on a bien compris

1) Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 25 \end{pmatrix}$. Déterminer deux réels ⍰ et ⍰ tels que $D = \alpha J + \beta C$

2*) On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Vérifier que $A = 4J + I_2$ où I_2 est la matrice unité d'ordre 2

b) Effectuer de deux façons le calcul de A^2, d'abord directement, puis en utilisant le résultat précédent.

3) Pour vérifier la connaissance et la compréhension du cours : Vrai ou faux ?

a) On peut parfois additionner des matrices de formats différents

b) On peut parfois multiplier des matrices de formats différents

c) A et O sont des matrices carrées de même ordre, O étant la matrice nulle. Si $A^2 = O$, alors $A = O$

d) B est une matrice carrée. On a $B^2 - B = B(B - 1)$

e) k est un réel et A une matrice. Si $kA = 0$ alors $k = 0$ ou A est la matrice nulle

f) A et B sont des matrices carrées de même ordre. On a $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$