Corrections Savoir Fl. 4

Corrigé Exercice 16

a. $\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$ donc pour $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)$ **on ne peut pas conclure**

$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\frac{1}{x} \leq f(x)$ donc, d'après le théorème de comparaison $\boldsymbol{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty}$

b. $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ et $f(x) \leq \frac{1}{x}$ donc, d'après le théorème de comparaison $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ donc pour $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ **on ne peut pas conclure**

c. $\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1}{x} + x = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x + 1 = 2$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\boldsymbol{\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = 2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} + x = +\infty$ et $\frac{1}{x} + x \leq f(x)$ donc, d'après le théorème de comparaison $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty}$

d. $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ donc pour $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ **on ne peut pas conclure**

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} -\frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0}$

e. $|f(x) - 1| \leq x \Leftrightarrow -x \leq f(x) - 1 \leq x \Leftrightarrow -x + 1 \leq f(x) \leq x + 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} -x + 1 = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x + 1 = 1$ donc, d'après le théorème des gendarmes $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} -x + 1 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} x + 1 = 2$ donc, pour $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ **on ne peut pas conclure**

Corrigé Exercice 17

1) a. On a $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow x - 1 \leq x + \sin x \leq x + 1$ on a bien $\boldsymbol{x - 1 \leq f(x) \leq x + 1}$

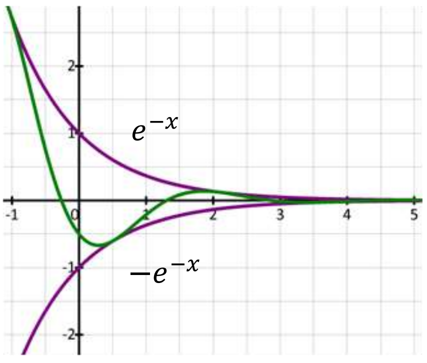
b. La courbe de f est **bornée par les droites d'équation $\boldsymbol{y = x - 1}$ et $\boldsymbol{y = x + 1}$**

c. $\lim\limits_{x\to -\infty} x + 1 = -\infty$ et $f(x) \leq x + 1$ d'après le théorème de comparaison, on a $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} x - 1 = +\infty$ et $f(x) \geq x - 1$ d'après le théorème de comparaison, on a $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty}$

2) a. on a $-1 \leq \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$ comme l'exponentielle est toujours positive, on a aussi $-e^{-x} < e^{-x}\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq e^{-x}$ donc $\boldsymbol{-e^{-x} \leq g(x) \leq e^{-x}}$

La courbe de g est **bornée par les courbes d'équation $\boldsymbol{y = -e^{-x}}$ et $\boldsymbol{y = e^{-x}}$**



b. On a $\lim\limits_{x\to +\infty} -e^{-x} = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{-x} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes : $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = 0}$

3) $\lim_{x \to 0^+} \ln x + 1 = -\infty$ or $h(x) \leq \ln x + 1$ donc, d'après le théorème de comparaison, $\boldsymbol{\lim_{x \to 0^+} h(x) = -\infty}$

$\lim_{x \to +\infty} \ln x - 1 = +\infty$ or $h(x) \geq \ln x - 1$ donc, d'après le théorème de comparaison, $\boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty}$

4)La limite d'un polynôme est celle de son terme de plus haut degré
$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+2}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = 1$ et $\lim_{Y \to 1} \ln Y = 0$ donc par composition de limites $\boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 0}$

5) on a $-1 \leq \cos x \leq 1$ et, pour $x < 0$, on a alors $-x \geq x \cos x \geq x$
et $x^2 + 1 > 0$ donc $\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x \cos x}{x^2+1} \leq -\frac{x}{x^2+1}$ Or $\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2} = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} -\frac{x}{x^2+1} = 0$
donc, d'après el théorème des gendarmes, $\lim_{x \to -\infty} \frac{x \cos x}{x^2+1} = 0$

On a $-1 \leq \sin x \leq 1$ et, pour $x > 0$, on a alors $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} + 1 \leq 1 + \frac{1}{x}$
On a $\lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$ donc, d'après le théorème des gendarmes $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} + 1 = 1$

6) Pour $-\infty$, on peut conclure, car $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{6} = +\infty$ et comme pour $x < 0$, on a $f(x) \geq \frac{x^2}{6}$, d'après le théorème de comparaison, on a $\boldsymbol{\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$
Par contre, pour $+\infty$, on ne peut rien dire, car **l'inégalité n'est pas vérifiée pour $x > 0$!!!**