Corrections Savoir Fl. 5

Corrigé Exercice 18

1) a) $f(I_1) =]-\infty; 2[$; $f(I_2) = [1; +\infty[$ et $f(I_3) = [1; +\infty[$

b) $g(J_1) = [-1; 0[$; $g(J_2) =]-\infty; 3]$ et $g(J_3) =]-\infty; 3]$

2) a) Sur $]-3; +\infty[$, on a $f(x) \geq 1$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'y a pas de solution.

Sur $]-\infty; -3[$, la fonction f est continue et strictement décroissante avec $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) > 0$ et $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x) < 0$
Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ y admet une unique solution.

b) Sur, $]-\infty; -3[$ on a $f(x) \leq 2$ donc l'équation $f(x) = \frac{5}{2}$ n'y a pas de solution.

Sur$]-3; 4]$, la fonction f est continue et strictement décroissante avec $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x) > \frac{5}{2}$ et $f(4) < \frac{5}{2}$
Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = \frac{5}{2}$ y admet une solution.

De même, $[4; +\infty[$, la fonction f est continue et strictement croissante avec $f(4) < \frac{5}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) > \frac{5}{2}$
Donc, l'équation $f(x) = \frac{5}{2}$ y admet une solution.

$\Rightarrow$ **L'équation a donc 2 solutions sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$**

c) Sur $]-\infty; 0]$, on a $g(x) \geq -1$ donc l'équation $g(x) = -e$ n'y a pas de solution.

Sur $[0; +\infty[$, la fonction$g$ est continue et strictement décroissante avec $g(0) > -e$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) < -e$
Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = -e$ y admet une unique solution.

d) Sur, $]-\infty; -2]$ on a $g(x) \leq 0$ donc l'équation $g(x) = 1$ n'y a pas de solution.

Sur $[-2; 0]$, la fonction g est continue et strictement croissante avec $g(-2) < 1$ et $g(0) > 1$
Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 1$ y admet une solution.

De même, $[0; +\infty[$, la fonction g est continue et strictement décroissante avec $g(0) > 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) < 1$
Donc, l'équation $g(x) = 1$ y admet une solution.

$\Rightarrow$ **L'équation a donc 2 solutions sur $\mathbb{R}$**

Corrigé Exercice 19

1) a . $f'(x) = 3x^2 + 1$ somme de deux termes positifs, donc la dérivée f' est positive, la fonction f est croissante.
Un polynôme a la même limite que son terme de plus haut degré, donc on a :
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

b. $x^3 + x = -1 \iff x^3 + x + 1 = 0 \iff f(x) = 0$
Sur $\mathbb{R}$, la fonction $f$est continue et strictement croissante, et on a $0 \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$, c'est-à-dire $x^3 + x = -1$, admet une **unique solution α**
On a, $\boldsymbol{\alpha \simeq -0,68}$

2) $x - e^x + 2 = -1 \Leftrightarrow x - e^x + 3 = 0$ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x - e^x + 3$

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

On a $g'(x) = 1 - e^x$ et $1 - e^x \geq 0 \Leftrightarrow e^x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$

$g(0) = -1 + 3 = 2$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$ et décroissante sur $\mathbb{R}^+$, et on a $0 \in g(\mathbb{R}^-) =]-\infty; 2]$ et $0 \in g(+) =]-\infty; 2]$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$, c'est-à-dire $x - e^x + 2 = -1$, **admet exactement 2 solutions, l'une positive et l'autre négative.**

3) a. $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0$ donc, par somme de limites $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ donc, par somme de limites $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

b. $h'(x) = \frac{1}{x} + 2x = \frac{2x^2+1}{x}$ or, pour $x > 0$, numérateur comme dénominateur sont strictement positifs.

Donc h' est strictement positive et h est strictement croissante

x	0		$+\infty$
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

c. La fonction h est continue et strictement croissante sur]0 ;+∞[, et on a $0 \in h\left(]0\,;+\infty[\right) = \mathbb{R}$ et

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$, **admet** une unique solution sur $]0; +\infty[$

d. $h(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha + \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha = -\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha = e^{-\alpha^2} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{e^{-\alpha^2}} = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{e^{\alpha^2} = 1}$