Corrections Savoir Fl. 2

Corrigé Exercice 6

1) Fonction $\boldsymbol{f}$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-4$ $\Rightarrow$ asymptote horizontale en $-\infty$: $\boldsymbol{y=2}$
et en $+\infty$: $\boldsymbol{y=-4}$

Et $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$
$\Rightarrow$ asymptote verticale $\boldsymbol{x=-1}$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$2 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow -4$

Fonction $\boldsymbol{g}$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$
$\Rightarrow$ asymptote horizontale en $-\infty$: $\boldsymbol{y=-3}$
et en $+\infty$: $\boldsymbol{y=0}$

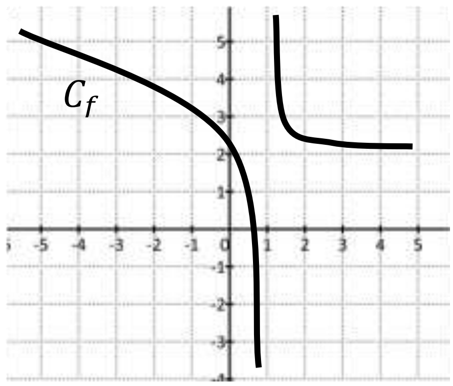
Et $\lim\limits_{x\to0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=+\infty$
$\Rightarrow$ asymptote verticale $\boldsymbol{x=0}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$-3 \nearrow +\infty$	‖	$+\infty \searrow 0$

Fonction $\boldsymbol{h}$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=-3$ $\Rightarrow$ asymptote horizontale en $-\infty$: $\boldsymbol{y=1}$ et en $+\infty$: $\boldsymbol{y=-3}$

Et $\lim\limits_{x\to2^-} h(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to2^+} h(x)=+\infty$ $\Rightarrow$ asymptote verticale $\boldsymbol{x=2}$

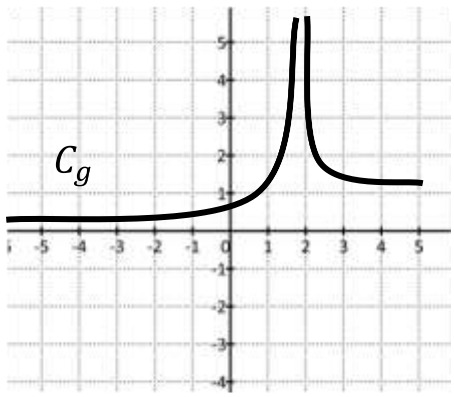


2) Fonction $\boldsymbol{f}$: $D_f=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$ $\Rightarrow$ asymptote verticale $\boldsymbol{x=1}$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ $\Rightarrow$ asymptote horizontale en $+\infty$: $\boldsymbol{y=2}$ et



Fonction $\boldsymbol{g}$: $D_g=]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

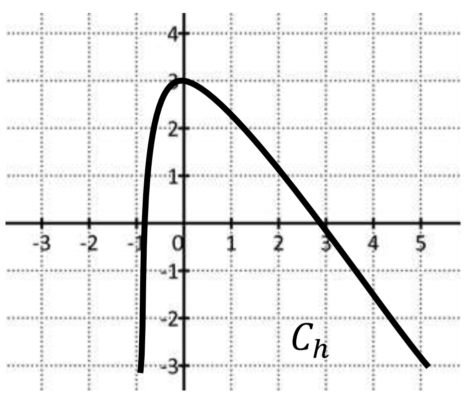
$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$ $\Rightarrow$ asymptote horizontale en $-\infty$: $\boldsymbol{y=0}$

$\lim\limits_{x\to2^-} g(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to2^+} g(x)=+\infty$ $\Rightarrow$ asymptote verticale $\boldsymbol{x=2}$

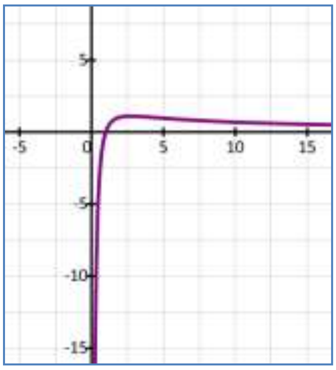
et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ $\Rightarrow$ asymptote horizontale en $+\infty$: $\boldsymbol{y=1}$

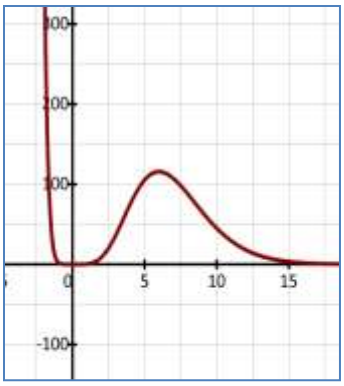
Fonction $\boldsymbol{h}$: $D_h=]-1;+\infty[$

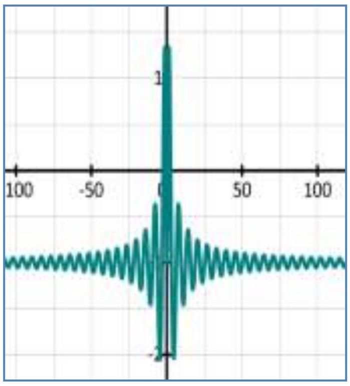
$\lim\limits_{x\to-1} f(x)=-\infty$
$\Rightarrow$ asymptote verticale $\boldsymbol{x=-1}$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

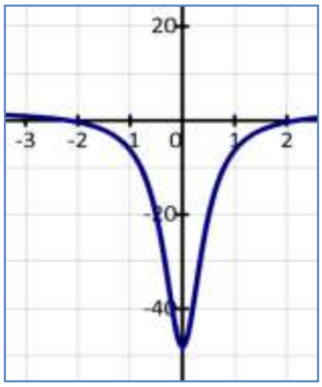


3)









$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -2$ asymptote horizontale $y = -2$

$\lim\limits_{x\to-\infty} i(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} i(x) = 2$ asymptote horizontale $y = 2$

Corrigé Exercice 7

1)

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} -2\ln x = +\infty$ **b)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{2}{3x} = -\infty$ **c)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -\dfrac{3}{x^2} = -\infty$ **d)** $\lim\limits_{t\to 0^-} 2e^t = 2e^0 = 2$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} 4 - \dfrac{2}{x} = -\infty$ **f)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x^2} - 5 = +\infty$ **g)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x + \dfrac{1}{x}$ Cas indéterminé **h)** $\lim\limits_{t\to 0^-} 5e^t - 3t^2 = 5e^0 - 3\times 0 = 5$

2)

a) $\lim\limits_{x\to 2^+} x - 2 = \mathbf{0^-}$ **b)** $\lim\limits_{y\to 4^-} 4 - x = \mathbf{0^+}$ **c)** $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} 2 + 2x = \mathbf{0^+}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 5^-} -5 - x = 0^-$

e) On a $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^+} -x = -\frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^+} 1 - 2x = \mathbf{0^-}$ donc $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^+} -x(1-2x) = \mathbf{0^+}$

f) On a $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ x<-3}} x^2 = \mathbf{9^+}$ **donc** $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ x<-3}} x^2 - 9 = \mathbf{0^+}$

g) On a $\lim\limits_{x\to 2^-} x^2 = 4^+$ Donc $\lim\limits_{x\to 2^-} 4 - x^2 = \mathbf{0^-}$

h) On a $\lim\limits_{x\to -1^+} x^2 = +1$ donc $\lim\limits_{x\to -1^+} 1 + x^2 = \mathbf{2}$

Corrigé Exercice 8

1) a) On a $\lim\limits_{x\to 2^+} x - 2 = 0^+$ donc par passage à l'inverse : $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$

b) On a $\lim\limits_{y\to 3^-} y - 3 = 0^-$ donc par passage à l'inverse $\lim\limits_{y\to 3^-} \frac{2}{y-3} = -\infty$

c) On a $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} 2x + 2 = 0^+$ donc par passage à l'inverse $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{-1}{2x+2} = -\infty$ (attention au signe)

d) On a $\lim\limits_{x\to 5^-} 5 - x = 0^+$ donc par passage à l'inverse $\lim\limits_{x\to 5^-} \frac{1}{5-x} = +\infty$

e) On a $\lim\limits_{\substack{x\to -4\\ x<-4}} = 0^+$ donc par passage à l'inverse $\lim\limits_{\substack{x\to -4\\ x<-4}} \frac{1}{-4-x} = +\infty$

f) On a $\lim\limits_{x\to 2^+} 4 - 2x = 0^-$ donc par passage à l'inverse $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{\mathbf{-3}}{4-2x} = +\infty$

g) On a $\lim\limits_{x\to -2^+} x + 2 = 0^+$ donc par passage à l'inverse $\lim\limits_{x\to -2^+} \frac{1}{2(x+2)} = +\infty$

h) On a $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} 3 - 3x = 0^+$ donc par passage à l'inverse $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{\mathbf{-2}}{3-3x} = -\infty$

i) On a $\lim\limits_{x\to -1^+} x+1=0^+$ donc, par l'inverse $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{1}{x+1}=+\infty$ et par somme $\lim\limits_{x\to -1^+} 5+\frac{1}{x+1}=+\infty$

j) On a $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} x-4=0^-$ mais $\ln\left(\frac{1}{4}\right)<0$ Alors par passage à l'inverse $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} \frac{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}{x-4}=+\infty$

k) On a $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} 3x-3=0^+$ et donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} e^x=e^1=e$ Alors par passage à l'inverse $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} e^x+\frac{e}{3x-3}=+\infty$

l) On a $\lim\limits_{x\to 2^-} 2-x=0^+$ donc par passage à l'inverse $\lim\limits_{x\to 2^-} -\frac{3}{2-x}=-\infty$ Alors $\lim\limits_{x\to 2^-} x-\frac{3}{2-x}=-\infty$

2) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x+1=1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} 1-2\ln x=+\infty$ $\Rightarrow$ par produit de limites $\lim\limits_{x\to 0^+} (x+1)(1-2\ln x)=+\infty$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} e^x+1=2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} 1+\frac{1}{x}=-\infty$ $\Rightarrow$ par produit de limites $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (e^x+1)\left(1+\frac{1}{x}\right)=-\infty$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{2x}=+\infty$ $\Rightarrow$ par produit de limites $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x}{2x}=-\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} 3x=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x=-\infty$ $\Rightarrow$ Il s'agit d'un **cas indéterminé**

e) $\lim\limits_{x\to 2^+} 4-x=2$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} x-2=0^+$ $\Rightarrow$ par quotient de limites $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{4-x}{x-2}=+\infty$

f) $\lim\limits_{x\to 3^-} \ln x=\ln 3>0$ et $\lim\limits_{x\to 3^-} 9-x^2=0^+$ $\Rightarrow$ par quotient de limites $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{\ln x}{9-x^2}=+\infty$

g) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} 2e^x+1=\frac{2}{e}+1>0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} x+1=0^+$ $\Rightarrow$ par quotient de limites $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{2e^x+1}{x+1}=+\infty$

h) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}-1=-1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x=-\infty$ $\Rightarrow$ par produit de limites $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\sqrt{x}-1\right)\ln x=+\infty$

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x+2=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} e^x=1$ $\Rightarrow$ par quotient de limites $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x+2}{e^x}=-\infty$

j) $\lim\limits_{x\to 0^-} e^x=1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} x^2=0^+$ $\Rightarrow$ par quotient de limites $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^x}{x^2}=+\infty$

k) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x-3=-\infty$ $\Rightarrow$ Il s'agit d'un **cas indéterminé**

l) $\lim\limits_{x\to 0^+} 1-\ln x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x=0^+$ $\Rightarrow$ par quotient de limites $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1-\ln x}{x}=+\infty$

m) $\lim\limits_{x\to -2^-} x^2+1=5$ et $\lim\limits_{x\to -2^-} x+2=0^-$ $\Rightarrow$ par quotient de limites $\lim\limits_{x\to -2^-} \frac{x^2+1}{x+2}=-\infty$

n) $\lim\limits_{x\to 1^+} e^x=e$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} e-e^x=0^-$ $\Rightarrow$ par quotient de limites $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{e^x}{e-e^x}=-\infty$

p) $\lim\limits_{x\to 4^-} 4-x=0^+$ et $\lim\limits_{x\to 4^-} x-2=2$ $\Rightarrow$ par quotient de limites $\lim\limits_{x\to 4^-} \frac{4-x}{x-2}=0$

q) $\lim\limits_{x\to -1^+} x^3+1=0^+$ et $\lim\limits_{x\to -1^+} 2x+2=0^+$ $\Rightarrow$ Il s'agit d'un **cas indéterminé**

Corrigé Exercice 9

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 2x - \sqrt{x} = 0$

Et $g(x) = 2x - \sqrt{x} = \sqrt{x}\left(2\sqrt{x} - 1\right)$ or $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} 2\sqrt{x} - 1 = +\infty$

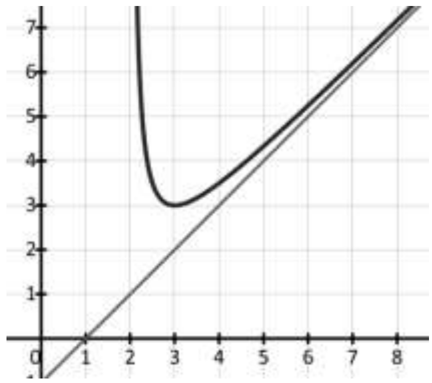
$\Rightarrow$ Par quotient de limites $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$

b) $h(x) = \dfrac{\ln x + 1}{2 - 3\ln x} = \dfrac{\ln x\left(1 + \frac{1}{\ln x}\right)}{\ln x\left(\frac{2}{\ln x} - 3\right)} = \dfrac{1 + \frac{1}{\ln x}}{\frac{2}{\ln x} - 3}$ or $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\ln x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{\ln x} = 0$

$\Rightarrow$ Par quotient de limites $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = -\frac{1}{3}$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = -\frac{1}{3}$

Corrigé Exercice 10

1. a. & b.



2. a. $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)^2 - 1}{(x-2)^2} = \boldsymbol{\frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}}$

Pour $x^2 - 4x + 3$ on a $\Delta = 16 - 12 = 4$; $x_1 = \frac{4-2}{2} = 1$ *et* $x_2 = \frac{4+2}{2} = 3$

Donc, avec $f(3) = 3 - 1 + \frac{1}{3-2} = 3$

x	2		3		$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$	|	$-$	0	$+$	
$(x-2)^2$	0	$+$	|	$+$	
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	||	↘	3	↗	

b. $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

Donc la **droite d'équation** $\boldsymbol{x = 2}$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x-2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} x - 1 = +\infty$ donc par somme de limites, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)} = +\infty$

3. $f(x) - (x-1) = \frac{1}{x-2}$ or, pour $x > 2$, on a $x - 2 > 0$ et donc $f(x) - (x-1) > 0$

La courbe $\mathcal{C}$ est toujours au-dessus de la droite $\mathcal{D}$.

4. **a.** $PM = f(x) - (x-1)$

b.

x	f(x)
10	0,125
100	0,010204082
1 000	0,001002004
10 000	0,00010002
100 000	1,00002E-05
1 000 000	1E-06

c. $\lim\limits_{x\to +\infty} PM = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x-2} = 0$

$\Rightarrow$ **La courbe $\mathcal{C}$ se rapproche toujours plus de la droite $\mathcal{D}$ sans jamais l'atteindre**

Corrigé Exercice 11

1) a) $f'(x) = \frac{4-2x-x(-2)}{(4-2x)^2} = \frac{4}{(4-2x)^2}$ le dénominateur est un carré donc positif.
La dérivée f' est strictement positive sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$, donc la fonction f y est **strictement croissante.**

b) la limite en ∞ d'un polynôme est la même que celle de son terme de plus haut degré
$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{4-2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{-2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{-2} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{4-2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{-2x} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

La droite d'équation $\boldsymbol{y} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ est asymptote horizontale à la courbe

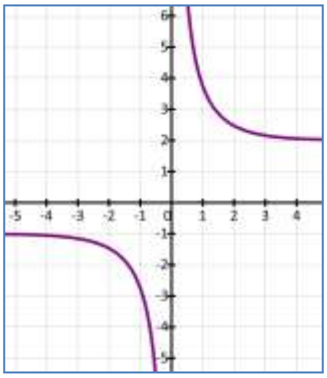
c) $\lim\limits_{x\to2} x = 2$ mais $\lim\limits_{x\to2^-} 4-2x = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to2^+} 4-2x = 0^-$ donc $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = -\infty$

La droite d'équation $\boldsymbol{x} = \mathbf{2}$ est asymptote verticale à la courbe

d)

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ ↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗ $-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

2) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x + 1 = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x - 1 = -1$ $\Rightarrow$ Par quotient de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \mathbf{-1}$
La droite $\boldsymbol{y} = \mathbf{-1}$ est asymptote horizontale à la courbe en $-\infty$



et $g(x) = \frac{2e^x+1}{e^x-1} = \frac{e^x\left(2+\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)} = \frac{2+\frac{1}{e^x}}{1-\frac{1}{e^x}}$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 + \frac{1}{e^x} = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{e^x} = 1$

$\Rightarrow$ Par quotient de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \mathbf{2}$
La droite $\boldsymbol{y} = \mathbf{2}$ est asymptote horizontale à la courbe en $+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to0} 2e^x + 1 = 3$ mais $\lim\limits_{x\to0^-} e^x - 1 = 0^-$ et $\lim\limits_{x\to0^+} e^x - 1 = 0^+$

donc $\lim\limits_{x\to0^-} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = +\infty$ **La droite $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ est asymptote verticale**