# Savoir A. 2 Corrections

## Corrigé Exercice 8

**1)**

| Division euclidienne | Congruence |
|---|---|
| $34 = 6 \times 5 + 4$ | $34 \equiv \mathbf{4}\ [5]$ |
| $17 = 2 \times 7 + 3$ | $17 \equiv \mathbf{3} \bmod (7)$ |
| $23 = \mathbf{5} \times 4 + \mathbf{3}$ | $23 \equiv 3\ [4]$ |
| $27 = \mathbf{3} \times \mathbf{9} + \mathbf{0}$ | $27 \equiv 0\ [9]$ |

| Expressions | Congruences |
|---|---|
| $34 - 19 = 3 \times 5$ | $34 \equiv \mathbf{19}\ [5]$ |
| $17 - (-4) = 3 \times 7$ | $17 \equiv \mathbf{-4}\ [7]$ |
| $23 - (\mathbf{-5}) = \mathbf{7} \times \mathbf{4}$ | $23 \equiv -5 \bmod (4)$ |
| $27 - \mathbf{18} = \mathbf{1} \times \mathbf{9}$ | $27 \equiv 18\ [9]$ |

**2) a)** $16 \equiv 2\ [7]$ donc $16 \equiv \mathbf{9}\ [7]$ et $16 \equiv \mathbf{-5}\ [7]$
**b)** $11 \equiv 5 \bmod (3)$ donc $11 \equiv \mathbf{8} \bmod (3)$ et $11 \equiv \mathbf{2} \bmod (3)$
**c)** $25 \equiv -3\ [7]$ donc $25 \equiv \mathbf{4}\ [7]$ et $25 \equiv \mathbf{-10}\ [7]$
**d)** $43 \equiv -7\ [10]$ donc $43 \equiv \mathbf{3}\ [10]$ et $43 \equiv \mathbf{-17}\ [10]$
**e)** $33 \equiv 17 \bmod (8)$ donc $33 \equiv \mathbf{25} \bmod (8)$ et $33 \equiv \mathbf{9} \bmod (8)$

**3) a)** $18 \equiv \mathbf{2}\ [4]$ **b)** $41 \equiv \mathbf{2} \bmod(3)$ **c)** $27 \equiv \mathbf{3}\ [12]$ **d)** $50 \equiv \mathbf{0}\ [25]$ **e)** $61 \equiv \mathbf{5}\ mod(7)$

**4) a)** $128 - 15 = 113$ et $113 \div 11 \simeq 10{,}27\ldots$ n'est pas un multiple de 11
⇒ **128 et 15 ne sont pas congrus modulo 11**

**b)** $214 - 25 = 189 = 9 \times 21$ multiple de 9 ⇒ **214 et 25 sont congrus modulo 9**

**5) a) FAUX** : $132 - 47 = 85$ n'est pas un multiple de 15
**b) FAUX** : $1\,214 + 8 = 1222$ n'est pas un multiple de 44
**c) VRAI** : $899 + 1 = 900 = 45 \times 20$ est un multiple de 45

## Correction Exercice 9

**1) a)** $2015 = 7 \times 287 + 6 \Rightarrow \boldsymbol{r = 6}$ **b)** $r = 6 + 7k \Rightarrow \boldsymbol{r = 20}$ **c)** $\boldsymbol{r = -8}$

**2) a)** $2017 \equiv \mathbf{7}\ [10]$ **b)** $2017 \equiv \mathbf{-3}\ [10]$

**3)** $49 = 5 \times 9 + 4 \Rightarrow \mathbf{49 \equiv 4\ [5]}$ ou $\mathbf{49 \equiv 4\ [9]}$
$75 = 9 \times 8 + 3 \Rightarrow \mathbf{75 \equiv 3\ [9]}$ ou $\mathbf{75 \equiv 3\ [8]}$
$610 = 67 \times 9 + 7 \Rightarrow \mathbf{610 \equiv 7\ [9]}\ ou\ \mathbf{610 \equiv 7\ [67]}$

**4)** $100 = 9 \times 11 + 1$ donc $100 \equiv 1\ [11]$ et $\boldsymbol{n \equiv 1\ [11]}$. **Le reste est 1**

**5)** $27 \equiv 5 \bmod (n) \Leftrightarrow 22 \equiv 0 \bmod (n) \Leftrightarrow$ 22 est un multiple de $n$ $\Leftrightarrow$ $n$ est un diviseur de 22
$\boldsymbol{n \in \{1; 2; 11; 22\}}$

**6) a) VRAI** : on doit avoir pour un entier $n$ : $n \equiv 0\ [3]$ ou $n \equiv 1\ [3]$ ou $n \equiv 2\ [3]$
Or $7 \equiv 1\ [3]$ ; $8 \equiv 2\ [3]$ et $9 \equiv 0\ [3]$

**b)** $-3 \equiv 0\ [3]$ ; $28 \equiv 1\ [3]$ et $137 \equiv 2\ [3]$ Donc **ça marche**

**7)** $n = 7 + 11k \Rightarrow \boldsymbol{S = \{7;\ 18\ ;\ 29\ ;\ 40\}}$

## Corrigé Exercice 10

**1) a.**

| $x \equiv \cdots [6]$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $4x$ | 0 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 |
| $4x \equiv \cdots\ [6]$ | 0 | 4 | 2 | 0 | 4 | 2 |

**b.** Les restes possibles sont **0, 2 et 4**

**c.** On a $39 \equiv 3\ [6]$, donc le nombre $\mathbf{4 \times 39}$ **est bien divisible par 6** (il congrue à zéro modulo 6).

**2) a.**

| $x \equiv \cdots [4]$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | 0 | 1 | 4 | 9 |
| $x^2 \equiv \cdots\ [4]$ | 0 | 1 | 0 | 1 |

**b.** Les carrés divisibles par 4 sont les **nombres pairs** (ceux qui s'écrivent sous la forme $4k$ ou $4k + 2$)

**3) a.**

| $x \equiv \cdots [5]$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $4x - 9$ | $-9$ | $-5$ | $-1$ | 3 | 7 |
| $4x - 9 \equiv \cdots\ [5]$ | 1 | 0 | 4 | 3 | 2 |

**b.** On a $16 \equiv 1\ [5]$ donc $f(16) = 4 \times 16 - 9$ congrue à zéro modulo 5 : **oui, elle est multiple de 5**

**4)**

| $x + y \equiv \cdots [5]$ | | $x \equiv \cdots [5]$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y \equiv \cdots [5]$ | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |
| | 2 | 2 | 3 | 4 | 0 | 1 |
| | 3 | 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| | 4 | 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |

| $xy \equiv \cdots [5]$ | | $x \equiv \cdots [5]$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y \equiv \cdots [5]$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| | 2 | 0 | 2 | 4 | 1 | 3 |
| | 3 | 0 | 3 | 1 | 4 | 2 |
| | 4 | 0 | 4 | 3 | 2 | 1 |

**b.**

$A = 23 + 78$ — On a $23 \equiv 3\ [5]$ et $78 \equiv 3\ [5]$ donc $\boldsymbol{A \equiv 1\ [5]}$ $\Rightarrow$ **reste 1**

$B = 217 + 411$ — On a $217 \equiv 2\ [5]$ et $411 \equiv 1\ [5]$ donc $\boldsymbol{B \equiv 3\ [5]}$ $\Rightarrow$ **reste 3**

$C = 14 \times 76$ — On a $14 \equiv 4\ [5]$ et $76 \equiv 1\ [5]$ donc $\boldsymbol{C \equiv 4\ [5]}$ $\Rightarrow$ **reste 4**

$D = 852 \times 753$ — On a $852 \equiv 2\ [5]$ et $753 \equiv 3\ [5]$ donc $\boldsymbol{D \equiv 1\ [5]}$ $\Rightarrow$ **reste 1**

## Corrigé Exercice 11

**1)** Tableau des restes modulo 3

| $n \equiv \cdots$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $n^2 - 4 \equiv \cdots$ | $-4 \equiv \mathbf{2}\ (3)$ | $-3 \equiv \mathbf{0}\ (3)$ | $0 \equiv \mathbf{0}\ (3)$ |
| $n(n^2 - 4) \equiv \cdots$ | $\mathbf{0}\ (3)$ | $\mathbf{0}\ (3)$ | $\mathbf{0}\ (3)$ |

Tous les restes sont nuls, donc $n(n^2 - 4)$ est bien un multiple de 3

**2)** Tableau des restes modulo 6 de $2r + 1$ et de $r + 1$ puis produit (car $2n + 1 \equiv 2r + 1\ [6]$ *etc* ...)

| $n \equiv r\ (6)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | **5** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $2r + 1 \equiv \cdots (6)$ | 1 | 3 | 5 | $7 \equiv \mathbf{2}\ (6)$ | $9 \equiv \mathbf{3}\ (6)$ | $11 \equiv \mathbf{5}\ (6)$ |
| $r + 1 \equiv \cdots (6)$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $6 \equiv 0\ (6)$ |
| $r(2r + 1)(r + 1)$ | 0 | 6 | 30 | 24 | 60 | 0 |
| $A \equiv \cdots (6)$ | $0 \equiv \mathbf{0}\ (6)$ | $6 \equiv \mathbf{0}\ (6)$ | $30 \equiv \mathbf{0}\ (6)$ | $24 \equiv \mathbf{0}\ (6)$ | $60 \equiv \mathbf{0}\ (6)$ | $0 \equiv \mathbf{0}\ (6)$ |

Donc $A$ est bien divisible par 6 (restes nul dans tous les cas)

## Corrigé Exercice 12

**1)** On a $3 \times 7 = 21 \equiv 1\ [5]$ Donc **3 est un inverse de 7 modulo 5** (et 7 est un inverse de 3 modulo 5 aussi)

**2) a.** On a les restes possibles des nombres $4x$ modulo 6 : il n'y a pas de reste égal à 1 possible :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $4x \equiv \cdots\ [6]$ | 0 | 4 | 2 | 0 | 4 | 2 |

Donc on ne pourra jamais trouver un nombre $x$ tel que $4x \equiv 1\ [6]$ $\Rightarrow$ **4 n'a pas d'inverse modulo 6**

**b.**

| $x \equiv \cdots [3]$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $11x$ | 0 | 11 | 22 |
| $11x \equiv \cdots\ [3]$ | 0 | 2 | 1 |

Donc pour tout nombre $x$ tel que $x \equiv 2\ [3]$ , on aura $11x \equiv 1\ [3]$ et $x$ sera un inverse de 11 modulo 3

Les inverse de 11 modulo 3 sont donc les nombres de la forme $\boldsymbol{3n + 2}$ avec $n \in \mathbb{Z}$

**3)** $5^3 \equiv 1\ [31] \Leftrightarrow\ 5 \times 25 \equiv 1[31]$. Donc **25 est un inverse de $\mathbf{5}$ modulo 31.**