Savoir M. 3 - Inverse

Entraînement 1

1) Les matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ sont-elles inversibles (justifier) ?
Si oui, donner les matrices inverses.

2) Soit C et P les matrices : $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 2 & -4 & 6 \\ 7 & 2 & -7 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{11}{8} & \frac{1}{4} \\ -7 & -\frac{21}{4} & \frac{1}{2} \\ -4 & -\frac{23}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Montrer que P est la matrice inverse de C

3) On a une matrice carrée M d'ordre 4 telle que : $4M^2 + 2I_4 = 6M$ où I_4 est la matrice identité d'ordre 4

En déduire que M est inversible, et donner une expression de M^{-1}.

Entraînement 2

1) À quelle condition la matrice $M = \begin{pmatrix} x & -2 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}$ est-elle inversible (justifier) ?
Donner alors sa matrice inverse.

2) Soit B et C les matrices : $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 3 & 9 \\ -4 & 2 & 6 \\ -8 & 4 & 14 \end{pmatrix}$

Montrer que B et C sont deux matrices inverses

3) On a une matrice carrée A d'ordre 3 telle que : $A^2 - \frac{1}{2}I_3 = 3A$ où I_3 est la matrice identité d'ordre 3

En déduire que A est inversible, et exprimer A^{-1} en fonction de A et de I_3

Corrigé Savoir M.3

Corrigé Entraînement 1

1) $Det\ (A) = 6 \times 2 - 4 \times 3 = 0$ donc **A n'est pas inversible**

$Det\ (B) = 2 \times 4 - 3 \times 6 = -10$ donc B est inversible et $B^{-1} = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

2) $C \times P = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 2 & -4 & 6 \\ 7 & 2 & -7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & -\frac{11}{8} & \frac{1}{4} \\ -7 & -\frac{21}{4} & \frac{1}{2} \\ -4 & -\frac{23}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 21 + 20 & \frac{11}{8} - \frac{63}{4} + \frac{115}{8} & -\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - \frac{5}{4} \\ -4 + 28 - 24 & -\frac{11}{4} + \frac{84}{4} - \frac{69}{8} & \frac{1}{2} - 2 + \frac{3}{2} \\ -14 - 14 + 28 & -\frac{77}{8} - \frac{42}{4} + \frac{161}{8} & \frac{7}{4} + 1 - \frac{7}{4} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$ Donc $C \times P = I_3$ et on a bien $\boldsymbol{P = C^{-1}}$

3) $4M^2 + 2I_4 = 6M \Leftrightarrow 4M^2 - 6M = -2I_4 \Leftrightarrow -2M^2 + 3M = I_4 \Leftrightarrow M(-2M + 3I_4) = I_4$

M est bien inversible, avec $\boldsymbol{M^{-1} = -2M + 3I_4}$

Corrigé Entraînement 2

1) On doit avoir $Det(M) \neq 0 \Leftrightarrow 12x - 6 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{6}{12} \Leftrightarrow \boldsymbol{x \neq \frac{1}{2}}$**.** On a alors $\boldsymbol{M^{-1} = \frac{1}{12x-6}\begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 3 & x \end{pmatrix}}$

2) $B \times C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 3 & 9 \\ -4 & 2 & 6 \\ -8 & 4 & 14 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} -10 + 12 & 6 - 6 & 18 - 18 \\ -20 - 4 + 24 & 12 + 2 - 12 & 36 + 6 - 42 \\ 8 - 8 & -4 + 4 & -12 + 14 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **Donc $B \times C = I$ on a bien : $C = B^{-1}$**

3) $A^2 - \frac{1}{2}I_3 = 3A \Leftrightarrow A^2 - 3A = \frac{1}{2}I_3 \Leftrightarrow 2A^2 - 6A = I_3 \Leftrightarrow A(2A - 6I_3) = I_3$

A est bien inversible, et $\boldsymbol{A^{-1} = 2A - 6I_3}$