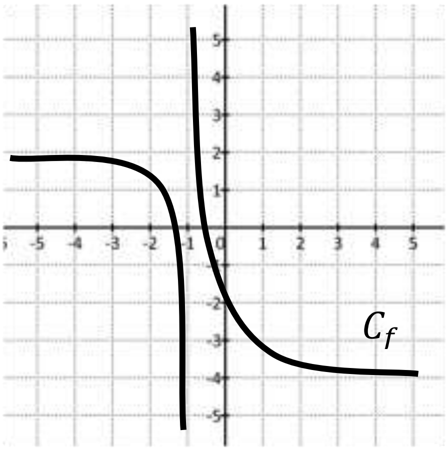
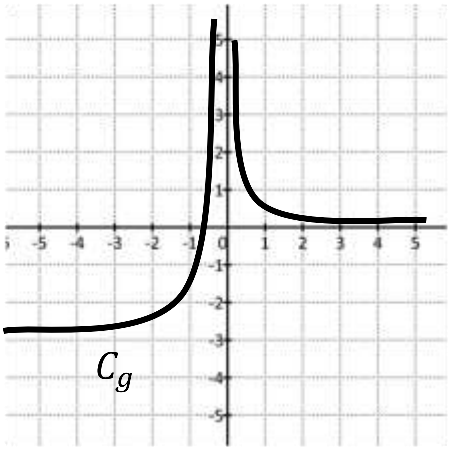
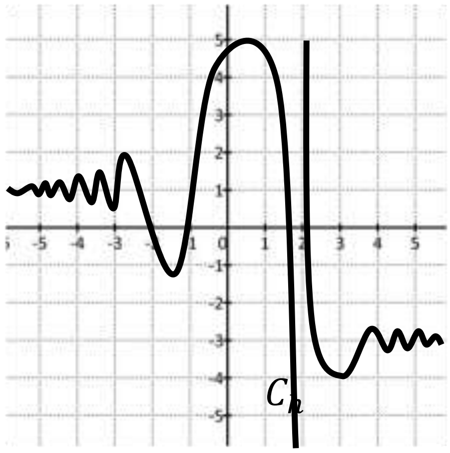
Savoirs FL. 2 : Limite autour d'un réel a

Exercice 6 : Limite d'une fonction en $x = a$

1) Chacune des fonctions représentées possèdent des asymptotes verticales et horizontales. Conjecturer les équations de ces asymptotes, écrire les limites auxquelles elles correspondent.
Donner le tableau de variation complet des fonctions f et g.







2) A partir des tableaux de variations suivants, déterminer l'ensemble de définition et les limites des fonctions aux bornes de cet ensemble. Préciser les asymptotes et donner une allure possible de la courbe.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
	$+\infty$		‖ $+\infty$		
$f(x)$		↘	‖	↘	
			$-\infty$ ‖		2

x	$-\infty$		2		$+\infty$
			$+\infty$ ‖ $+\infty$		
$g(x)$		↗	‖	↘	
	0		‖		1

x	-1		0		$+\infty$
	‖		3		
$h(x)$	‖	↗		↘	
	‖ $-\infty$				$-\infty$

3) Avec la calculatrice, conjecturer les limites des fonctions suivantes (attention à choisir une fenêtre assez grande). Préciser les asymptotes s'il semble y en avoir

$f(x) = \dfrac{3\ln x}{x}$ $\qquad g(x) = x^6 e^x$ $\qquad h(x) = \dfrac{5x\sin x}{x^2+1} - 1$ $\qquad$ et $\qquad k(x) = 2 - \dfrac{50}{1+5x^2}$

Exercice 7 : Multiples et sommes

1) Multiples et sommes de fonctions de références– Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} -2\ln x$ **b)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{2}{3x}$ **c)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -\dfrac{3}{x^2}$ **d)** $\lim\limits_{t\to 0^-} 2e^t$

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} 4 - \dfrac{2}{x}$ **b)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x^2} - 5$ **c)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x + \dfrac{1}{x}$ **d)** $\lim\limits_{t\to 0^-} 5e^t - 3t^2$

2) Fonctions définies en 1 point – Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 2^+} x - 2$ **b)** $\lim\limits_{y\to 4^-} 4 - x$ **c)** $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} 2 + 2x$ **d)** $\lim\limits_{x\to -5^-} -5 - x$

e) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^+} -x(1-2x)$ **f)** $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ x<-3}} x^2 - 9$ **g)** $\lim\limits_{x\to 2^-} 4 - x^2$ **h)** $\lim\limits_{x\to -1^+} 1 + x^2$

Exercice 8 : Produits, inverses et quotients

1) Passage à l'inverse – Déterminer les limites suivantes :

e)	$\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2}$	**f)**	$\lim\limits_{y\to 3^-} \dfrac{2}{y-3}$	**g)**	$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} -\dfrac{1}{2x+2}$	**h)**	$\lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{1}{5-x}$
i)	$\lim\limits_{\substack{x\to -4\\ x<-4}} \dfrac{1}{-4-x}$	**j)**	$\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{-3}{4-2x}$	**k)**	$\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{1}{2(x+2)}$	**l)**	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{-2}{3-3x}$
e)	$\lim\limits_{x\to -1^+} 5+\dfrac{1}{x+1}$	**f)**	$\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} \dfrac{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}{x-4}$	**g)**	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} e^x+\dfrac{e}{3x-3}$	**h)**	$\lim\limits_{x\to 2^-} x-\dfrac{3}{2-x}$

2) Produits et quotients – Déterminer les limites suivantes :

a)	$\lim\limits_{x\to 0^+} (x+1)(1-2\ln x)$	**b)**	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (e^x+1)\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$	**c)**	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln x}{2x}$	**d)**	$\lim\limits_{x\to 0^+} 3x\ln x$
e)	$\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{4-x}{x-2}$	**f)**	$\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{\ln x}{9-x^2}$	**g)**	$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \dfrac{2e^x+1}{x+1}$	**h)**	$\lim\limits_{x\to 0^+} (\sqrt{x}-1)\ln x$
i)	$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x+2}{e^x}$	**j)**	$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^x}{x^2}$	**k)**	$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\ln x-3}$	**l)**	$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\ln x}{x}$
m)	$\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x^2+1}{x+2}$	**n)**	$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{e^x}{e-e^x}$	**p)**	$\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{4-x}{x-2}$	**q)**	$\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x^3+1}{2x+2}$

Exercice 9 : Cas indéterminés

Déterminer, en justifiant, les limites des fonctions suivantes :

a) $g(x) = 2x - \sqrt{x}$ en 0 et en $+\infty$ **b)** $h(x) = \dfrac{\ln x+1}{2-3\ln x}$ en 0 et en $+\infty$

Exercice 10 : Étude de fonction (1)

Soit f la fonction définie sur $]2; +\infty[$ par $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-2}$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentant f et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x - 1$

1. a. Tracer $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sur une calculatrice pour $2 < x \leq 10$ et $-0{,}5 \leq y \leq 10$

b. Reproduire l'allure du graphique sur papier

2. a. Déterminer le sens de variation de f sur $]2; +\infty[$

b. Déterminer les limites de f en 2 et en $+\infty$. En déduire une asymptote à la courbe $\mathcal{C}$

3. Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{D}$.

4. Soit $x > 2$, M le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x et P le point de $\mathcal{D}$ d'abscisse x.

a. Exprimer en fonction de x la distance PM

b. Observer, à la calculatrice, une table de valeur pour de grandes valeurs de x

c. Quelle est la limite de PM quand x tend vers $+\infty$? Interpréter graphiquement pour les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$

On dit que $\mathcal{D}$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$

Exercice 11 : Études de fonctions (2)

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par $f(x) = \frac{x}{4-2x}$

a) Étudier les variations de la fonction f

b) Étudier les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ et en déduire une asymptote éventuelle pour la courbe représentative de la fonction f.

c) Étudier les limites de $f(x)$ quand x tend vers 2 (on distinguera les cas $x > 2$ et $x < 2$), et en déduire une asymptote éventuelle pour la courbe représentative de la fonction f.

d) Dresser le tableau de variation complet de la fonction f

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $g(x) = \frac{2e^x+1}{e^x-1}$

a) Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter graphiquement.

b) Étudier les limites de g en 0. Interpréter graphiquement.

c) Contrôler les résultats à la calculatrice.