Savoir FL. 1 : Limites en l'infini

Entraînement exponentielles

$f(x) = e^x + 1 - \dfrac{1}{x}$ $\quad g(x) = \dfrac{3e^x}{1-x}$ $\quad h(t) = 2te^t - 5$ $\quad \phi(x) = e^{2x} - e^x + 1$ $\quad \mathcal{A}(m) = (1-3m)e^m$

a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

b. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

c. Déterminer la limite de la fonction h quand t tend vers $+\infty$

d. Montrer que $\phi(x) = e^x(e^x - 1) + 1$ et en déduire les limites de ϕ en $-\infty$ et en $+\infty$

e. Déterminer $\lim\limits_{m\to+\infty} \mathcal{A}(m)$

Entraînement logarithme

$F(x) = 2x(1 - \ln x)$ $\quad G(x) = \dfrac{\ln x}{2 - \dfrac{1}{x}}$ $\quad H(t) = (2t-1)\ln t$ $\quad \psi(x) = 2\ln x - x^2$ $\quad \mathcal{S}(a) = \dfrac{3}{2 + \ln a}$

a. Déterminer la limite de F en $+\infty$

b. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)$

c. Déterminer la limite de la fonction H quand t tend vers $+\infty$

d. Déterminer la limite de ψ en $+\infty$

e. Déterminer $\lim\limits_{a\to+\infty} \mathcal{S}(a)$

Entraînement autres fonctions

$f(x) = -2x^3 + x^2 - 4$ $\quad g(x) = \dfrac{1}{3-x}$ $\quad h(t) = 1 - 2\sqrt{t}$ $\quad \phi(x) = \dfrac{x^3 - 2x}{1 - x^2}$

a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

b. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

c. Déterminer la limite de la fonction h quand t tend vers $+\infty$

d. Déterminer la limite de ϕ en $-\infty$ et $+\infty$

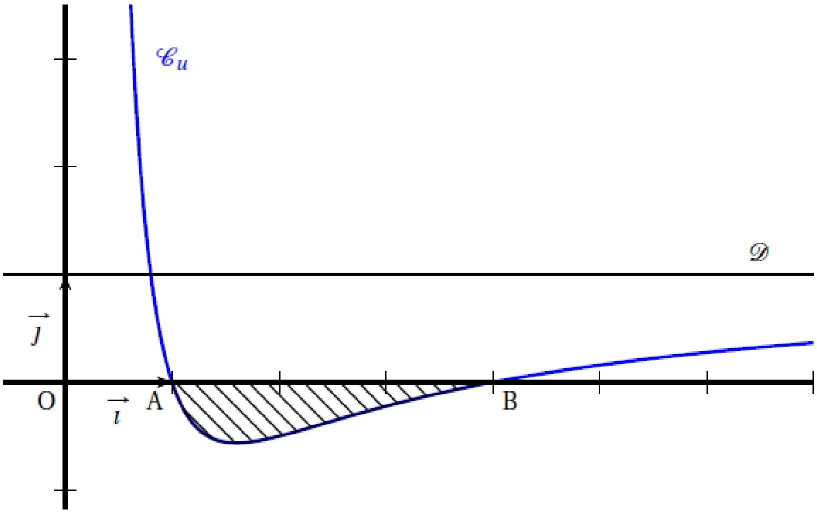
Extrait bac

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on désigne par $\mathcal{C}_u$ la courbe représentative de la fonction u définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$u(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$$

où a, b et c sont des réels fixés.

On a tracé sur le graphique ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_u$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 1$.



On précise que la courbe $\mathcal{C}_u$ passe par les points $A(1\,;\,0)$ et $B(4\,;\,0)$ et que l'axe des ordonnées et la droite $\mathcal{D}$ sont asymptotes à la courbe $\mathcal{C}_u$

1. Donner $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)$ En déduire la valeur de a.

2. Donner les valeurs de $u(1)$ et $u(4)$. En déduire les valeurs de b et de c.

Corrections Savoir FL. 1

Corrigé Entraînement exponentielles

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+1=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{1}{x}=0$ donc par somme $\lim\limits_{x\to-\infty} \boldsymbol{f(x)=1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x+1=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x}=0$ donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{f(x)}=+\infty$

b. $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} 3e^x=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1-x=+\infty\end{cases}$ donc, par quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} \boldsymbol{g(x)=0}$

c. $\begin{cases}\lim\limits_{t\to+\infty} 2t=+\infty\\ \lim\limits_{t\to+\infty} e^t=+\infty\end{cases}$ donc par produit $\lim\limits_{t\to+\infty} 2te^t=+\infty$ et par somme $\lim\limits_{t\to+\infty} \boldsymbol{h(t)}=+\infty$

d. $e^x(e^x-1)+1=e^{2e}-e^x+1=\phi(x)$ CQFD

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x-1=-1\end{cases}$ donc par produit $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x(e^x-1)=0$ et par somme $\lim\limits_{x\to-\infty} \boldsymbol{\phi(x)=1}$

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x-1=+\infty\end{cases}$ donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x(e^x-1)=+\infty$ et par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{\phi(x)}=+\infty$

e. $\begin{cases}\lim\limits_{m\to+\infty} 1-3m=-\infty\\ \lim\limits_{m\to+\infty} e^m=+\infty\end{cases}$ donc, par produit de limites $\lim\limits_{m\to+\infty} \boldsymbol{\mathcal{A}(m)}=-\infty$

Corrigé Entraînement logarithme

a. $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} 2x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1-\ln x=-\infty\end{cases}$ donc par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{F(x)}=-\infty$

b. $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2-\frac{1}{x}=2\end{cases}$ donc par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{G(x)}=+\infty$

c. $\begin{cases}\lim\limits_{t\to+\infty} 2t-1=+\infty\\ \lim\limits_{t\to+\infty} \ln t=+\infty\end{cases}$ donc par produit, $\lim\limits_{t\to+\infty} \boldsymbol{H(t)}=+\infty$

d. $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} -x^2=-\infty\end{cases}$ Il s'agit pour une somme d'un **cas indéterminé**

e. $\lim\limits_{a\to+\infty} 2+\ln a=+\infty$ donc, par quotient, $\lim\limits_{a\to+\infty} \boldsymbol{S(a)=0}$

Corrigé Entraînement autres fonctions

a. La limite d'un polynôme est celle de son terme de plus haut degré
$\lim\limits_{x\to-\infty} \boldsymbol{f(x)} = \lim\limits_{x\to-\infty} -2x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{f(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} -2x^3 = -\infty$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} 3 - x = +\infty$ donc par quotient de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} \boldsymbol{g(x) = 0}$

c. $\lim\limits_{t\to+\infty} \sqrt{t} = +\infty$ donc par multiple et somme, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} \boldsymbol{h(t)} = -\infty$

d. $\phi(x) = \dfrac{x^3\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{1}{x^2}-1\right)} = \dfrac{x\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}-1}$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to\infty} 1 - \frac{2}{x^2} = 1 \\ \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} - 1 = -1 \end{cases}$ donc par produit $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(1-\frac{2}{x^2}\right) = -\infty$ et par quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} \boldsymbol{\phi(x)} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{2}{x^2}\right) = +\infty$ et par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{\phi(x)} = -\infty$

Corrigé Extrait bac

1. La droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 1$ est asymptotes à la courbe $\mathcal{C}_u$donc $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 1$
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = a + 0 + 0 = a$ on en déduit que $\boldsymbol{a = 1}$

2. $u(1) = 0 = 1 + b + c$ et $u(4) = 0 = 1 + \frac{b}{4} + \frac{c}{16}$

On cherche donc à résoudre $\begin{cases} 1 + b + c = 0 \\ 1 + \frac{b}{4} + \frac{c}{16} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 - c \\ 16 + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 - c \\ 16 - 4 - 4c + c = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 - c \\ -3c = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 - 4 \\ c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -5 \\ c = 4 \end{cases}$ Donc $\boldsymbol{u(x) = 1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}}$