

Savoir FL. 4 : Théorèmes de limites

Applications directes

1) Pour $x \geq 2$, on a $f(x) \geq x - 1$.

Peut-on conclure sur $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$? Justifier.

3) Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $0 \leq h(x) \leq 2e^{-x}$.

Peut-on conclure sur $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$? Justifier.

5) Pour $x \in]1; +\infty[$, on a $T(x) \geq e^{2x-1}$.

Peut-on conclure sur $\lim_{x \rightarrow +\infty} T(x)$? Justifier.

2) Pour $x < 0$, on a $g(x) \geq x^3 - 2x$.

Peut-on conclure sur $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$? Justifier.

4) Pour $x > 0$, on a $\ln t \leq f(t) \leq 2 \ln t$.

Peut-on conclure sur $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$ et sur $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$?

6) Pour $x \in]-\infty; -1[$, on a $1 - \frac{1}{x} \leq k(x) \leq 1 + \frac{1}{x}$.

Peut-on conclure sur $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x)$?

Extrait bac

Un publicitaire souhaite imprimer le logo ci-contre sur un T-shirt.

Il dessine ce logo à l'aide des courbes de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1)$ et $g(x) = -e^{-x} \cos x$.

1. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $-e^{-x} \leq f(x) \leq 3e^{-x}$

2. En déduire la limite de f en $+\infty$.



Corrections Savoir FL. 4

Corrigé Entraînement

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$ et $f(x) \geq x - 1$, donc, d'après les théorème de **comparaison**, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2) Un polynôme a les mêmes limites que son terme de plus haut degré, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$

On ne peut rien conclure

3) Par composée de limites, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^{-x} = \lim_{Y \rightarrow -\infty} 2e^Y = 0$ et $0 \leq h(x) \leq 2e^{-x}$

D'après le théorème des **gendarmes**, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$

4) $\lim_{t \rightarrow 0^+} 2 \ln t = -\infty$ et on a $f(t) \leq 2 \ln t$ donc d'après les théorème de **comparaison**, on a $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = -\infty$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty$ et on a $f(t) \geq \ln t$ donc d'après les théorème de **comparaison**, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$

5) $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 1 = +\infty \\ \lim_{Y \rightarrow +\infty} e^Y = +\infty \end{cases}$ donc, par composées de limites, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x-1} = +\infty$.

Comme de plus $T(x) \geq e^{2x-1}$, d'après les théorème de **comparaison**, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} T(x) = +\infty$

6) $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1 \end{cases}$ et $1 - \frac{1}{x} \leq k(x) \leq 1 + \frac{1}{x}$ donc, d'après le théorème des **gendarmes**, $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = 1$

Corrigé Extrait bac

1. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq -\cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$

donc, par addition, $-2 \leq -\cos x + \sin x \leq 2$

Et donc $-1 \leq -\cos x + \sin x + 1 \leq 3$

Comme de plus $e^{-x} > 0$, on en déduit bien que

Soit

$$-e^{-x} \leq e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \leq 3e^{-x}$$

$$-e^{-x} \leq f(x) \leq 3e^{-x}.$$

2. On a, par composée de limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^{-x}) = \lim_{y \rightarrow -\infty} (-e^y) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3e^{-x}) = 3 \times 0 = 0$

Comme $-e^{-x} \leq f(x) \leq 3e^{-x}$, on peut appliquer le théorème des gendarmes et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$