

Savoir Df. 2 : De la dérivée au tableau de variation

Exercice 4 : Construire le tableau de variation à l'aide de la dérivée

- 1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 5$
On admet que sa dérivée f' est donnée par : $f'(x) = -4x(-x^2 + 3x + 4)$
- Déterminer le tableau de signe de f' sur $\mathbb{R}$
 - En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$
 - Compléter le tableau de variation en calculant les valeurs des extrema de f
- 2) Soit la fonction g définie sur $[-3; 2]$ par $g(x) = (x^2 - x - 1)e^{x+1}$
On admet que sa dérivée g' est donnée par : $g'(x) = (x^2 + x - 2)e^{x+1}$
- Déterminer le tableau de signe de g' sur $[-3; 2]$
 - En déduire le tableau de variation complet (avec les extrema) de g sur $[-3; 2]$
 - Déterminer un encadrement de $g(x)$ pour $x \in [-3; 2]$ (valeurs exactes)
- 3) Soit la fonction h définie sur $[0; 2]$ par $h(x) = \frac{-x}{x+1}$. On admet que : $h'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$
- Justifier que la fonction h est décroissante sur $[0; 2]$
 - En déduire un encadrement de $h(x)$ sur $[0; 2]$

Exercice 5 : Étude de fonction (1) – Extrait sujet bac

Dans le parc national des Pyrénées, un chercheur travaille sur le déclin d'une espèce protégée dans les lacs de haute-montagne : le « crapaud accoucheur ». Dans certains lacs des Pyrénées, des truites ont été introduites par l'homme afin de permettre des activités de pêche en montagne. Le chercheur a étudié l'impact de cette introduction sur la population de crapauds accoucheurs d'un lac.

Ses études précédentes l'amènent à modéliser l'évolution de cette population en fonction du temps par la fonction f suivante : $f(t) = (0,04t^2 - 8t + 400)e^{\frac{t}{50}} + 40$ pour $t \in [0; 120]$

La variable t représente le temps écoulé, en jour, à partir de l'introduction à l'instant $t = 0$ des truites dans le lac, et $f(t)$ modélise le nombre de crapauds à l'instant t .

- Déterminer le nombre de crapauds présents dans le lac lors de l'introduction des truites.
- On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; 120]$ et on note f' sa fonction dérivée.

On donne : $f'(t) = 0,0008 \times t(t - 100)e^{\frac{t}{50}}$.

Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 120]$, puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle (on donnera des valeurs approchées au centième).

- Selon cette modélisation :
 - Déterminer le nombre de jours J nécessaires afin que le nombre de crapauds atteigne son minimum. Quel est ce nombre minimum ?
 - Justifier que, après avoir atteint son minimum, le nombre de crapauds dépassera un jour 140 individus.
 - À l'aide de la calculatrice, déterminer la durée en jour à partir de laquelle le nombre de crapauds dépassera 140 individus.

Exercice 6 : Étude de fonction (2) – Extrait sujet bac **

Le graphique ci-contre représente, dans un repère orthogonal, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 e^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-x}$$

1. a. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

b. Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$

2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-1 ; 1]$, on considère les points M de coordonnées $(x ; f(x))$ et N de coordonnées $(x ; g(x))$, et on note $d(x)$ la distance MN .

On admet que : $d(x) = e^{-x} - x^2 e^{-x}$.

On admet que la fonction d est dérivable sur l'intervalle $[-1 ; 1]$ et on note d' sa fonction dérivée.

On donne : $d'(x) = e^{-x}(x^2 - 2x - 1)$.

a. En déduire les variations de la fonction d sur l'intervalle $[-1 ; 1]$.

b. Déterminer l'abscisse commune x_0 des points M_0 et N_0 permettant d'obtenir une distance $d(x_0)$ maximale, et donner une valeur approchée à 0, 1 près de la distance $M_0 N_0$.

