Savoirs Fc. 3 : Applications du TVi

Exercice 7 : Recherche du signe d'une fonction

1) On donne le tableau de variation de f

x	2		13
$f(x)$	8	$\searrow$	-2

a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une seule solution sur l'intervalle [2 ; 13]. On la notera α.

b) Donner le tableau de signe de la fonction f sur [2 ; 13].

Un peu plus…

2) On considère la fonction g définie sur $[-1\,;2]$ par :

$$g(x) = 6x^2 - 2x^3 - 2$$

a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède sur $[-1\,;2]$ deux solutions qu'on notera α et β.

b) En déduire le tableau de signe de la fonction g.

2) On considère la fonction g définie sur $[-2; 6]$, par :

$g(x) = 1 + 3xe^{-0,5x}$

On donne le tableau de variation de la dérivée g' de g

x	-2		4		6
$g'(x)$	$6e$	$\searrow$	$-3e^{-}$	$\nearrow$	$-6e^{-3}$

Déterminer le tableau de signe de g' puis le tableau de variation de g sur $[-2; 6]$, en précisant les notations utilisées

3) Soit f la fonction définie sur $[0; 5]$ par : $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln(x^2 + 1)$

a) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f sur $[0; 5]$

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions sur $[0; 5]$ et donner un encadrement de la solution non entière α d'amplitude 10^{-2}.

c) Déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

Exercice 8 : Résolution d'équations

1) On cherche à résoudre l'équation (E_1) : $2x^3 + 5 = 6x^2$ pour $x \in [0; 2]$.

a. Montrer que la fonction $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5$ est strictement décroissante sur $[0; 2]$.

b. En déduire que l'équation (E_1) admet une unique solution sur $[0; 2]$.

c. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de cette solution

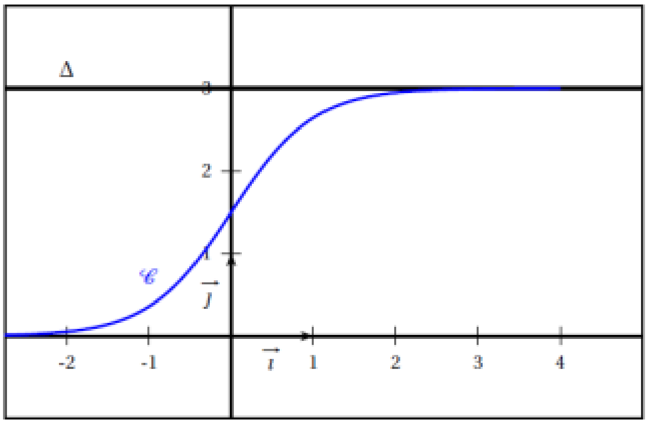
Un peu plus…

2) On cherche à résoudre l'équation (E_2): $x^4 + 10 = 8x^2$ pour $x \in [0; 5]$.

a. Montrer que (E_2) admet uniquement deux solutions α et β sur $[0; 5]$

b. Donner une valeur approchée de ces solutions au centième près

Exercice 9 : Extraits de bac : Pondichéry 2015



Partie A : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

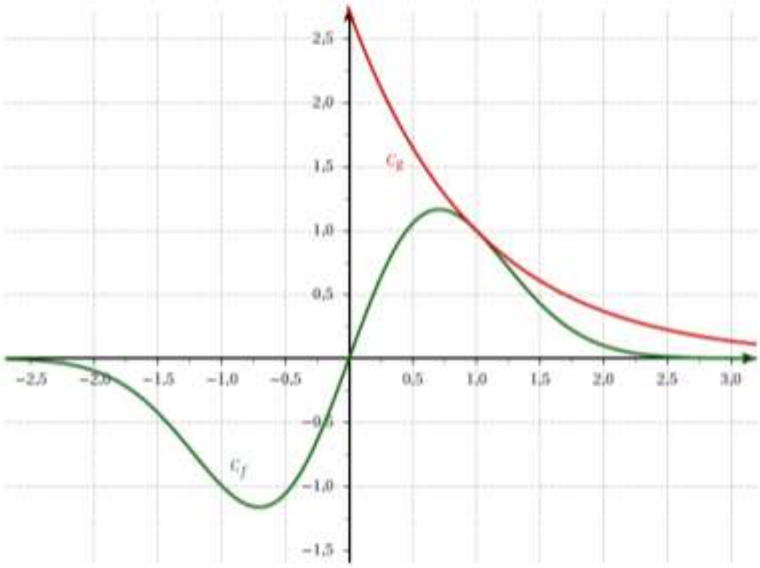
$$f(x) = \frac{3}{1 + e^{-2x}}$$

Sur le graphique ci-contre, on a tracé, dans un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = 3$.

1. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
(…)
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 2{,}999$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
(…)
Partie B : Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3 - f(x)$

1. Justifier que la fonction h est positive sur $\mathbb{R}$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}$ et Δ ?

Exercice 10 : Extrait de bac : Antilles 2016



On considère la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = xe^{1-x^2}$

Partie A

2. a. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = (1 - 2x^2)e^{1-x^2}$

b. En déduire le tableau de variations de la fonction f .

Partie B

On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = e^{1-x}$.

Sur le graphique ci-contre, on a tracé dans un repère les courbes représentatives C_f et C_g.

Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.

1. Après observation du graphique, quelle conjecture peut-on émettre ?

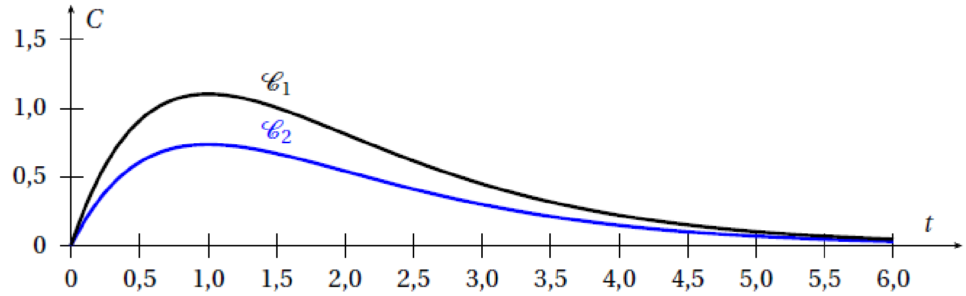
2. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $]-\infty ; 0]$, $f(x) < g(x)$.

Exercice 11 : Un sujet de bac (presque complet) : Polynésie 2016

Partie A

Voici deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ qui donnent pour deux personnes P_1 et P_2 de corpulences différentes la concentration C d'alcool dans le sang (taux d'alcoolémie) en fonction du temps t après ingestion de la même quantité d'alcool. L'instant $t = 0$ correspond au moment où les deux individus ingèrent l'alcool.
C est exprimée en gramme par litre et t en heure.

Définition : La corpulence est le nom scientifique correspondant au volume du corps



1. La fonction C est définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et on note C' sa fonction dérivée. À un instant t positif ou nul, la vitesse d'apparition d'alcool dans le sang est donnée par $C'(t)$.
À quel instant cette vitesse est-elle maximale ?
On dit souvent qu'une personne de faible corpulence subit plus vite les effets de l'alcool.

2. Sur le graphique précédent, identifier la courbe correspondant à la personne la plus corpulente. Justifier le choix effectué.

3. Une personne à jeun absorbe de l'alcool. On admet que la concentration C d'alcool dans son sang peut être modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = Ate^{-t}$
où A est une constante positive qui dépend de la corpulence et de la quantité d'alcool absorbée.

a. On note $f\,'$ la fonction dérivée de la fonction f. Déterminer $f\,'(0)$.

b. L'affirmation suivante est-elle vraie ?
« À quantité d'alcool absorbée égale, plus A est grand, plus la personne est corpulente. »

Partie B - Un cas particulier

Paul, étudiant de 19 ans de corpulence moyenne et jeune conducteur, boit deux verres de rhum. La concentration C d'alcool dans son sang est modélisée en fonction du temps t , exprimé en heure, par la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t\,) = 2te^{-t}$

1. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

2. À quel instant la concentration d'alcool dans le sang de Paul est-elle maximale ? Quelle est alors sa valeur ? Arrondir à 10^{-2} près.

…

4. Paul veut savoir au bout de combien de temps il peut prendre sa voiture. On rappelle que la législation autorise une concentration maximale d'alcool dans le sang de 0,2 g.L^{-1} pour un jeune conducteur.

a. Démontrer qu'il existe deux nombres réels t_1 et t_2 tels que $f(t_1) = f(t_2) = 0{,}2$.

b. Quelle durée minimale Paul doit-il attendre avant de pouvoir prendre le volant en toute légalité ?
Donner le résultat arrondi à la minute la plus proche.