

Savoir Nc. 1 : Calcul dans $\mathbb{E}$

Exercice 1 : Les calculs de bases

Effectuer les calculs suivants, en simplifiant au maximum le résultat obtenu.

- a) $z = 2(3 + 2i) + (1 - 4i)$ b) $z = (\sqrt{3} + i) - (-\sqrt{3} - i)$ c) $z = i(3 + 2i)$
d) $z = -2i(1 - 3i)$ e) $z = (1 + 2i)(3 - i)$ f) $z = (2 + i)\left(-\frac{1}{2} + 2i\right)$
g) $z = (2 - i)(4 + i)(i - 1)$ h) $z = (3 + 2i)^2$ j) $z = (2 + 5i)(2 - 5i)$

En bonus : $z = (1 - i)^3$

Exercice 2 : Identifier parties réelle et imaginaire

Pour chacun des nombres complexes suivants, déterminer $Re(z)$ et $Im(z)$, et préciser quand s'agit d'un nombre réel ou d'un imaginaire pur.

- a) $z = 2 + i$ b) $z = 5i - 3$ c) $z = \frac{i}{2}$ d) $z = 4 - \sqrt{3}$
e) $z = \frac{4-3i}{2}$ f) $z = 1 + 3i - i$ g) $z = 2i^2 + i + 2$ h) $z = i^3 - 1 + i$
i) $z = \frac{4}{3} - i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ j) $z = a - 2 + i(1 - b)$ k) $z = 3t - i(t - 2)$

Exercice 3 : Réfléchir sur les parties réelle et imaginaire

- 1) a. On donne $z_1 = 3 - a + (2 - 3a)i$. Déterminer pour quelle(s) valeurs de a le complexe z_1 est un réel.
b. On donne $z_2 = \frac{a+1}{2} - \frac{3+a}{2}i$. Déterminer pour quelle(s) valeurs de a le nombre z_2 est un imaginaire pur.
c. $z_3 = 4 - 5ai - a^2$. Déterminer a tel que $z_3 \in i\mathbb{R}$
- 2) a. On donne $z_5 = \frac{2a}{3} - 5i$. Déterminer a pour que $z_5 = 4 + (-5)i$
b. On donne $z_6 = 2a - 1 - (4 + b)i$. Déterminer a et b pour que $z_6 = \frac{3-4i}{2}$
c. Déterminer les réels x et y tels que : $x + 2i = 3 + i(5 - y)$

Exercice 4 : Calcul niveau +

- 1) On donne la fonction f définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = 2 - iz$
Calculer $f(3i)$; $f(-1)$; $f(1 + i)$ et calculer la forme algébrique de l'image de $z_1 = 2 + 3i$
- 2) On donne deux nombres complexes $z_1 = 2a - 3i$ et $z_2 = 1 - 2ai$
Donner, en fonction de a les parties réelle et imaginaire du nombre $Z = 2z_1 - iz_2$
- 3) a. Calculer i^2 ; i^3 ; i^4 ; i^5 ; i^{12} ; i^{13} ; i^{14}
b. Déterminer i^n selon les valeurs de n , entier naturel non nul (différentier les cas de figure)
c. En déduire la valeur de i^{2713}
- 4) Forcer la factorisation par i des nombres complexes suivants (attention aux signes)
a) $z = 3 - 2i$ b) $z = 4 + i$ c) $z = -2$
- 5) « Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $(1 + i)^{4n} = (-4)^n$ »... Vrai ou faux ? Justifier

Exercice 5 : Et pourquoi pas des suites ?

Soit (u_n) une suite à valeurs complexes définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n : $u_{n+1} = (1 + i)u_n$

- 1) Calculer u_1 et u_2
- 2) a. Par analogie avec les suites réelles, comment pourrait-on qualifier la suite (u_n) ?
b. Proposer une expression de u_n en fonction de n .
c. Déterminer u_5 .