Savoirs Fc. 5 : Calcul de dérivées secondes

Exercice 12 : Calcul de dérivées 2nde

1) Fonctions de référence : Pour chacune des fonctions, calculer la dérivée f' et la dérivée seconde f''

$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x + 7$ $g(x) = \dfrac{2x-3}{x}$ $j(x) = e^{2x}$ $\boxed{k(x) = 0{,}1x^4 - 0{,}5x^2 + 1{,}6}$

$h(x) = \dfrac{x^5}{20} - 2x^7$ $i(x) = \ln(x)$ $F(x) = (x^2+1)e^x$ $\boxed{G(x) = \dfrac{2-x^2}{3x}}$

2) Composées, produits : Pour chacune des fonctions, calculer la dérivée f' et la dérivée seconde f''

$f(x) = \ln(3x+1)$ $g(x) = e^{5x^2-2}$ $j(x) = x\,e^{4x-7}$ $\boxed{k(x) = \ln(x^2+4)}$

$h(x) = 2x^2 + 3x\ln(x)$ $i(x) = (2x-1)\,e^{0{,}5x}$ $m(x) = (x^2 - 3x + 6)\,e^{x^2-3}$ $\boxed{p(x) = 4 - (2x+1)\ln x}$

Exercice 13 : Dérivée n-ième *

Définition :
On appelle dérivées d'ordre n, ou dérivées n-ièmes, et on note $f^{(n)}(x)$, les dérivées successives de f.
On a ainsi, pour tout entier n non nul : $\boldsymbol{f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'}$

Soit p la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par : $p(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x + 5$

1) Déterminer, pour tout réel x, les dérivées d'ordre 1 à 5 : $p'(x), p''(x), p^{(3)}(x), p^{(4)}(x)$ et $p^{(5)}(x)$.

2) Soit p_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $p_n(x) = x^n$ où n est un entier naturel non nul.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier k compris entre 1 et n, on a :

$$p^{(k)}(x) = n(n-1) \times \ldots \times (n-k+1)x^{n-k}$$

3) Déterminer la dérivée d'ordre 5 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^8 - x^6 - x^3$