

Formule explicite

Calcul du terme u_n en fonction du rang n :

$$u_n = f(n)$$

On a $u_{n+1} = f(n+1)$

Ex. $u_n = n^2 + 2$ et $u_{n+1} = (n+1)^2 + 2 = n^2 + 2n + 3$
avec $f(x) = x^2 + 2$

Relation de récurrence

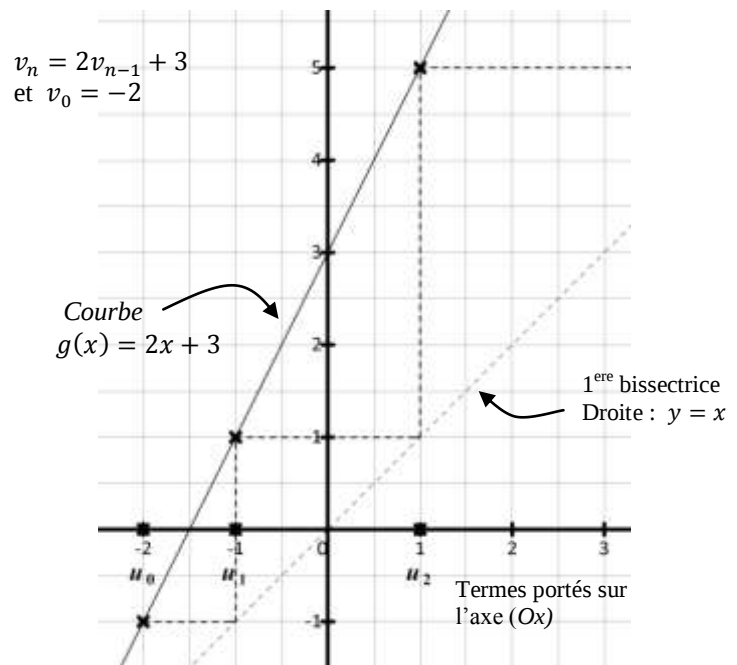
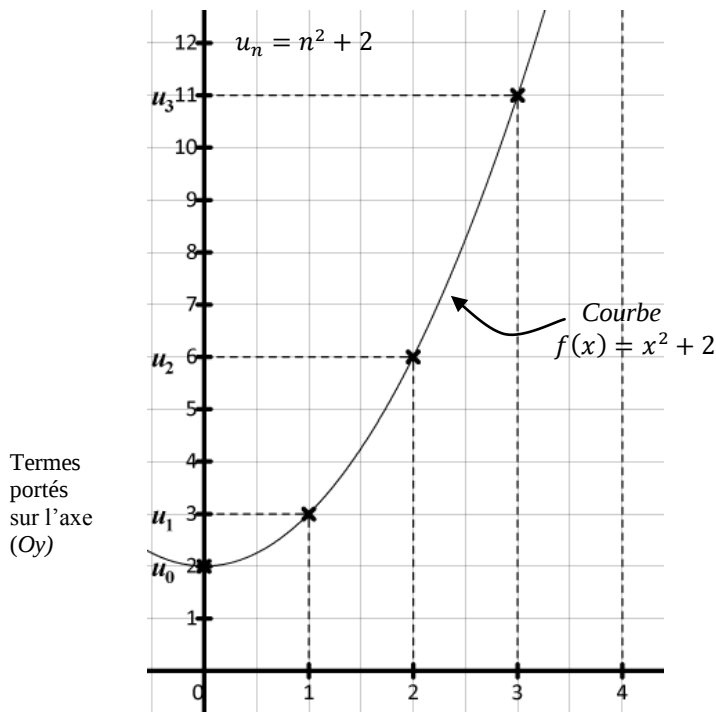
Calcul du terme v_n en fonction du terme précédent v_{n-1} : $v_n = g(v_{n-1})$

On a $v_{n+1} = g(v_n)$

Ex. $v_n = 2v_{n-1} + 3$ et $v_{n+1} = 2v_n + 3$
avec $g(x) = 2x + 3$

Attention : Donnée d'un premier terme v_{n_0}

Représentations graphiques



Sens de variation

Pour $n \geq n_0$: $u_{n+1} \geq u_n \Leftrightarrow (u_n)_{n \geq n_0}$ **croissante**

$u_{n+1} \leq u_n \Leftrightarrow (u_n)_{n \geq n_0}$ **décroissante**

$u_{n+1} = u_n \Leftrightarrow (u_n)_{n \geq n_0}$ **stationnaire**

Sinon, suites non monotones

Suites monotones

Deux méthodes :

Signe de $u_{n+1} - u_n$

Pour $n \geq n_0$:

$u_{n+1} - u_n \geq 0 \Leftrightarrow (u_n)_{n \geq n_0}$ **croissante**

$u_{n+1} - u_n \leq 0 \Leftrightarrow (u_n)_{n \geq n_0}$ **décroissante**

Ex $u_{n+1} - u_n = n^2 + 2n + 3 - (n^2 + 2)$
 $= 2n + 1 \geq 0$ car $n \geq 0$
 (u_n) est croissante

Variations de f

Pour $u_n = f(n)$:

f est croissante sur $[n_0; +\infty[\Leftrightarrow (u_n)_{n \geq n_0}$ croissante

f est décroissante sur $[n_0; +\infty[\Leftrightarrow (u_n)_{n \geq n_0}$ décroissante

Ex : $f(x) = x^2 + 2$ est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$
Donc (u_n) est croissante pour $n \geq 0$

3^{ème} méthode : Suites à termes strictement positifs : Si $u_n > 0$, le sens de variation dépend du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

Suites arithmétiques

Suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ de premier terme u_0 et de raison R

Formule explicite :

$$u_n = u_{n_0} + R(n - n_0)$$

Pour $n_0 = 0$, ie. de 1^{er} terme u_0 : $u_n = u_0 + Rn$

Pour $n_0 = 1$, ie. de 1^{er} terme u_1 : $u_n = u_1 + R(n - 1)$

Ex. (u_n) arithmétique de raison $\frac{2}{3}$ et de 1^{er} terme $u_0 = -2$

$$\Rightarrow u_n = -2 + \frac{2}{3}n$$

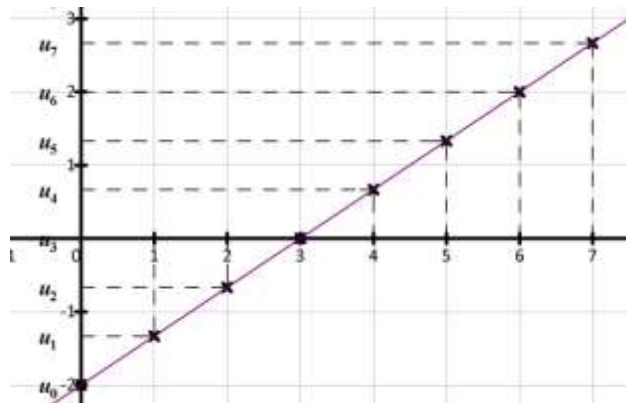
Relation de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + R$$

ou $u_n = u_{n-1} + R$

Ex. (u_n) arithmétique de raison $\frac{2}{3}$ et de 1^{er} terme $u_0 = -2$

$$\Rightarrow u_{n+1} = u_n + \frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad u_n = u_{n-1} + \frac{2}{3}$$



Sens de variation : $R > 0 \Leftrightarrow (u_n)$ croissante

$R < 0 \Leftrightarrow (u_n)$ décroissante

$R = 0 \Leftrightarrow (u_n)$ stationnaire

Calcul de raison : $R = \frac{u_n - u_p}{n - p}$ En particulier : $R = u_{n+1} - u_n$

Nature : Pour montrer que $(u_n)_{n \geq n_0}$ est arithmétique, il faut montrer que, pour tout $n \geq n_0$, on a : $u_{n+1} - u_n = \text{constante}$ (la constante trouvée étant la raison)

Suites géométriques

Suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ de premier terme u_0 et de raison q

Formule explicite :

$$u_n = u_{n_0} \times q^{(n - n_0)}$$

Pour $n_0 = 0$, ie. de 1^{er} terme u_0 : $u_n = u_0 \times q^n$

Pour $n_0 = 1$, ie. de 1^{er} terme u_1 : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

Ex. (u_n) géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de 1^{er} terme $u_1 = 4$

$$\Rightarrow u_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

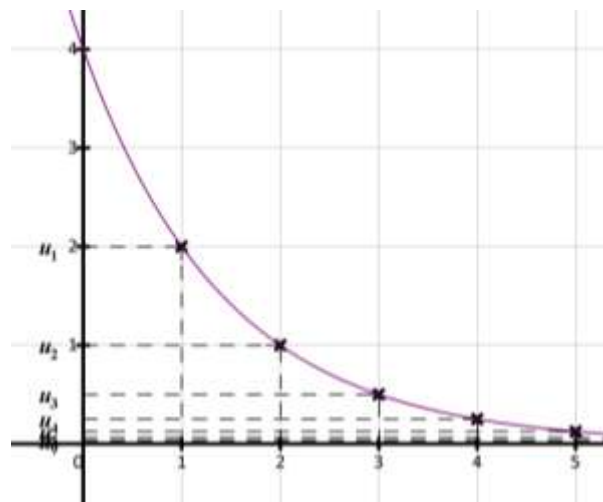
Relation de récurrence :

$$u_{n+1} = qu_n$$

ou $u_n = qu_{n-1}$

Ex. (u_n) géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de 1^{er} terme $u_1 = 4$

$$\Rightarrow u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \quad \text{ou} \quad u_n = \frac{1}{2}u_{n-1}$$



Sens de variation : $q < 0 \Leftrightarrow (u_n)$ non monotone

$\begin{cases} q > 1 \\ u_{n_0} > 0 \end{cases} \Rightarrow (u_n) \text{ croissante, mais } \begin{cases} q > 1 \\ u_{n_0} < 0 \end{cases} \Rightarrow (u_n) \text{ décroissante}$

$\begin{cases} 0 < q < 1 \\ u_{n_0} > 0 \end{cases} \Rightarrow (u_n) \text{ décroissante, mais } \begin{cases} 0 < q < 1 \\ u_{n_0} < 0 \end{cases} \Rightarrow (u_n) \text{ croissante}$

Calcul de raison : Cas particulier : $q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$

Nature : Pour montrer que $(u_n)_{n \geq n_0}$ est géométrique, il faut montrer que, pour tout $n \geq n_0$, on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \text{constante}$ (la constante trouvée étant la raison)