Fc. 6 : Convexité, point d'inflexions et tangentes

Définitions : Soit f une fonction deux fois dérivable, et soit f'' sa dérivée seconde

On dit que la **fonction f est convexe** sur un intervalle I si sa **dérivée seconde f'' est positive** sur I

On dit que la **fonction f est concave** sur un intervalle I si sa **dérivée seconde f'' est négative** sur I

On dit que **la fonction f admet un point d'inflexion** en $x = a$ si la **dérivée seconde f'' change de signe** en $x = a$ avec $\boldsymbol{f''(a) = 0}$

Exemple 1 : Soit f une fonction dérivable deux fois et f'' sa dérivée seconde.
On donne le tableau de signe de la dérivée seconde f''

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$\mathbf{0}$	$+$	

1) Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$
2) La courbe de f admet-elle des points d'inflexion ? Si oui, préciser où.

Propriétés : Soit f une fonction deux fois dérivable, et soit f'' sa dérivée seconde.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f

Si la **fonction f est convexe** sur I, alors $\mathcal{C}_f$ est **au dessus de ses tangentes** sur I

Si la **fonction f est concave** sur I, alors $\mathcal{C}_f$ est **en dessous de ses tangentes** sur I

Si **la fonction f admet un point d'inflexion** en $x = a$, alors **la courbe $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente en $x = a$**

Exemple 2 : Soit g une fonction dérivable deux fois sur $[-5; 5]$ et g'' sa dérivée seconde.
On donne le tableau de signe de la dérivée seconde g''

x	-5		0		3		5
$g''(x)$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	

1) On appelle Δ la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 2. Préciser la position relative de Δ et de g au voisinage de $x = 2$
2) Sur quel(s) intervalle(s) la courbe $\mathcal{C}_g$ est-elle au dessus de ses tangentes ?

Exemple 3 : étude de fonction

Soit f une fonction définie pour $x \geq 0$ par : $f(x) = 3\ln(2x + 4)$

1) Montrer que $f''(x) = -\frac{3}{(x+2)^2}$

2) a) En déduire la convexité de f sur $\mathbb{R}^+$

b) La courbe de f admet-elle un point d'inflexion ? Si oui, préciser où.

c) Déterminer l'équation de $\mathcal{T}$, tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $x = 0$. Préciser la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{T}$.

Fc. 6 : Résumé des liens entre f, f' et f''

▻ **Signes, sens de variations et convexité**

Fonction f	**Dérivée f'**	**Dérivée seconde f''**
Signe de f $f \geq 0 \quad (+)$ $f \leq 0 \quad (-)$		
Variation de f	**Signe** de f' $f' \geq 0 \quad (+)$ $f' \leq 0 \quad (-)$	
Convexité de f	**Variation** de f'	**Signe** de f'' $f'' \geq 0 \quad (+)$ $f'' \leq 0 \quad (-)$

▻ **Zéro, extrema et points d'inflexion**

Fonction f	**Dérivée f'**	**Dérivée seconde f''**
$\boldsymbol{f = 0}$ Point d'intersection (Ox)		
	$\boldsymbol{f' = 0}$ f' **change de signe**	
		$f'' = 0$ f'' **change de signe**

▻ **Tangentes**

Fonction f	**Dérivée f'**	**Dérivée seconde f''**
$\mathcal{C}_f$ admet en $x = a$ une **tangente** $\mathcal{T}$ de **coefficient directeur** $\boldsymbol{f'(a)}$ et d'équation :	Le nombre dérivé $\boldsymbol{f'(a)}$ est le **coefficient directeur de la tangente**. Graphiquement, on détermine à partir de 2 points de la tangente :	
Convexité de f f convexe f concave	**Variation** de f' $f' \nearrow$ $f' \searrow$	**Signe** de f'' $f'' \geq 0 \quad (+)$ $f'' \leq 0 \quad (-)$