Exercice 1.

Les deux parties sont indépendantes

1ère partie

Soit les matrices carrées d'ordre 2 : $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

a. Calculer B^2 et N^2

b. Exprimer B puis B^2 en fonction de N et de la matrice identité d'ordre 2 : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c. On admet que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $B^n = 5^n I + n5^{n-1}N$.
Donner les coefficients de la matrice B^4

2ème partie

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 3 \\ -3 & -10 & -3 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix}$

a. Calculer A^2

b. Montrer que $A^2 = -5A - 4I$ où I est la matrice identité d'ordre 3

c. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse

Exercice 2.

Un service hospitalier d'urgences accueille chaque semaine un nombre important de personnes à soigner.
Il est nécessaire de répertorier rapidement les différentes urgences pour pouvoir répondre le plus efficacement possible aux demandes de soin. Le service classifie trois sortes de patients qui se présentent aux urgences :

- les urgences graves, donc prioritaires, de type P_1
- les urgences secondaires, non prioritaires, de type P_2
- les patients qui se présentent pour des soins qui ne relèvent pas des urgences, de type P_3

Chaque semaine, le service relève les statistiques suivantes :

- x_1 est le nombre d'urgences de type P_1
- x_2 est le nombre d'urgences de type P_2
- x_3 est le nombre d'urgences de type P_3

On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Cette matrice est appelée matrice des urgences.

1) Que signifie, pour une semaine donnée, la matrice $X_0 = \begin{pmatrix} 25 \\ 75 \\ 250 \end{pmatrix}$?

2) - Pour une urgence de type P_1, le coût moyen par patient est de 1 500 € ; le temps moyen de prise en charge et de soin est de 3 heures et la masse moyenne de matériel médical utilisé non recyclable est de 2,5 kg.
- Pour une urgence de type P_2, le coût moyen par patient est de 650 € ; le temps moyen de prise en charge et de soin est de 1,5 heure et la masse moyenne de matériel médical utilisé non recyclable est de 1 kg.
- Pour une urgence de type P_1, le coût moyen par patient est de 90 € ; le temps moyen de prise en charge et de soin est d'un quart d'heure et la masse moyenne de matériel médical utilisé non recyclable est de 300 g.

On note A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1500 & 650 & 90 \\ 3 & 1{,}5 & 0{,}25 \\ 2{,}5 & 1 & 0{,}3 \end{pmatrix}$ appelée matrice de fonctionnement.

Calculer $Y_0 = AX_0$ et interpréter le résultat

3) Le service hospitalier ne peut pas dépasser certaines contraintes pour une semaine donnée. En particulier, il ne peut dépasser un budget supérieur à 224 000 € par semaine, faire travailler le personnel médical plus de 508 heures et rejeter plus de 420 kg de matériel médical non recyclable.

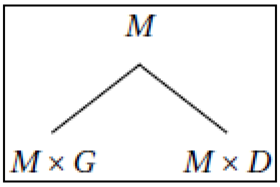
On note $B = \begin{pmatrix} 224\,000 \\ 508 \\ 420 \end{pmatrix}$

a. Calculer A^{-1} à la calculatrice

b. Déterminer le nombre maximum d'urgences des trois types que le service peur accueillir une même semaine

Exercice 3.

L'arbre de Stern-Brocot a été découvert séparément par le mathématicien allemand Moritz Abraham Stern (1858) et par Achille Brocot (1861), horloger français qui l'a utilisé pour concevoir des systèmes d'engrenages avec un rapport entre rouages proche d'une valeur souhaitée.
Cet exercice aborde la méthode avec des matrices carrées.

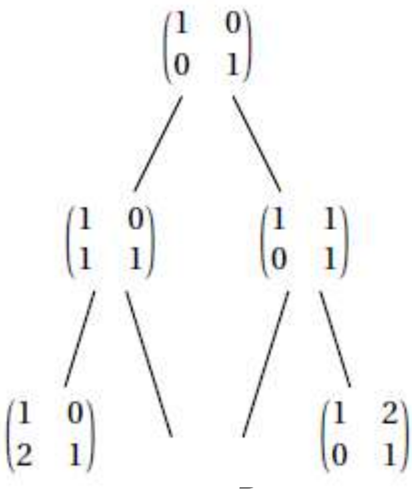


On considère les deux matrices $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On construit un arbre descendant à partir d'une matrice initiale, de la façon suivante : de chaque matrice carrée M de l'arbre partent deux nouvelles branches vers les deux autres matrices $M \times G$ (à gauche) et $M \times D$ (à droite).

Ces deux nouvelles matrices sont appelées les matrices filles de M.

Dans la méthode considérée, on prend comme matrice initiale la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.



1. Déterminer les deux matrices manquantes A et B, dans la troisième ligne de l'arbre de Stern-Brocot ci-contre.

Dans la suite de l'exercice, on admet que pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de l'arbre de Stern- Brocot, les nombres a, b, c, d sont des entiers vérifiant : $b + d \neq 0$.

2. On associe à une matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de l'arbre de Stern-Brocot la fraction $\frac{a+c}{b+d}$.
Montrer que, dans cette association, le trajet « gauche-droite-gauche » à partir de la matrice initiale dans l'arbre, aboutit à une matrice correspondant à la fraction $\frac{3}{5}$.

3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice de l'arbre. On rappelle que a, b, c, d sont des entiers.
On note $\Delta_M = ad - bc$, la différence des produits diagonaux de cette matrice.

a. Montrer que si $ad - bc = 1$, alors $d(a + c) - c(b + d) = 1$.

b. En déduire que si $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est unematrice de l'arbre de Stern-Brocot telle que$\Delta_M = ad - bc = 1$, alors $\Delta_{M \times G} = 1$, c'est-à-dire que la différence des produits diagonaux de la matrice $M \times G$ est aussi égale à 1.
On admet de même que $\Delta_{M\times D} = 1$, et que toutes les autres matrices N de l'arbre de Stern-Brocot vérifient l'égalité $\Delta_{\mathrm{N}} = 1$.

On admet que toute fraction associée à une matrice de l'arbre de Stern-Brocot est irréductible.

5. Soit *m* et *n* deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. Ainsi la fraction $\frac{m}{n}$ est irréductible.
On considère l'algorithme suivant :

```
Tant que m ≠ n, faire
    Si m < n
        Afficher « Gauche »
        n prend la valeur n − m
    Sinon
        Afficher «Droite »
        m prend la valeur m − n
```

a. Recopier et compléter le tableau suivant, indiquer ce qu'affiche l'algorithme lorsqu'on le fait fonctionner avec les valeurs $m = 4$ et $n = 7$.

Affichage		…	…	…	…
m	4	…	…	…	…
n	7	…	…	…	…

b. Conjecturer le rôle de cet algorithme.
Vérifier par un calcul matriciel le résultat fourni avec les valeurs $m = 4$ et $n = 7$.

1. CORRECTION

1ère partie

a. $B^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{25} & \mathbf{10} \\ \mathbf{0} & \mathbf{25} \end{pmatrix}$ et $N^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{O}$ c'est-à-dire la matrice nulle

b. $B = \boldsymbol{5I + N}$ et $B^2 = \boldsymbol{25I + 10N}$ **c.** $B^4 = 5^4 I + 4 \times 5^3 N = 625\, I + 500\, N = \begin{pmatrix} \mathbf{625} & \mathbf{500} \\ \mathbf{0} & \mathbf{625} \end{pmatrix}$

2ème partie

a. $A^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{-14} & \mathbf{-45} & \mathbf{-15} \\ \mathbf{15} & \mathbf{46} & \mathbf{15} \\ \mathbf{-15} & \mathbf{-45} & \mathbf{-14} \end{pmatrix}$

b. $-5A - 4I = \begin{pmatrix} -10 & -45 & -15 \\ 15 & 50 & 15 \\ -15 & -45 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -45 & -15 \\ 15 & 46 & 15 \\ -15 & -45 & -14 \end{pmatrix} = A^2$ CQFD

c. $A^2 = -5A - 4I \iff A^2 + 5A = -4I \iff A(A + 5I) = -4I \iff \boldsymbol{A \times \left(-\frac{1}{4}\right)(A + 5I) = I}$

Comme A est une matrice carrée, elle est inversible et $\boldsymbol{A^{-1} = -\frac{1}{4}A - \frac{5}{4}I}$

Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{4} - \frac{5}{4} & -\frac{9}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{10}{4} - \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{9}{4} & -\frac{2}{4} - \frac{5}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-\frac{7}{4}} & \mathbf{-\frac{9}{4}} & \mathbf{-\frac{3}{4}} \\ \mathbf{\frac{3}{4}} & \mathbf{\frac{5}{4}} & \mathbf{\frac{3}{4}} \\ \mathbf{-\frac{3}{4}} & \mathbf{-\frac{9}{4}} & \mathbf{-\frac{7}{4}} \end{pmatrix}$ ou $\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{4}} \begin{pmatrix} \mathbf{-7} & \mathbf{-9} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-9} & \mathbf{-7} \end{pmatrix}$

2. CORRECTION

1) Il y a, cette semaine, 25 urgences de type P_1, 75 urgences de type P_2 et 250 urgences de type P_3

2) $Y_0 = AX_0 = \begin{pmatrix} 1500 & 650 & 90 \\ 3 & 1{,}5 & 0{,}25 \\ 2{,}5 & 1 & 0{,}3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 25 \\ 75 \\ 250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1500 \times 25 + 650 \times 75 + 90 \times 250 \\ 3 \times 25 + 1{,}5 \times 75 + 0{,}25 \times 250 \\ 2{,}5 \times 25 + 75 + 0{,}3 \times 250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{108\,750} \\ \mathbf{250} \\ \mathbf{212{,}5} \end{pmatrix}$

Cette semaine-là, la prise en charge de toutes les urgences a coûté 108 750 €, le temps total de prise en charge est de 250 heures et il y a eu 212,5 kg de matériel non recyclable utilisé

3) a. $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{1075} & -\frac{84}{43} & \frac{22}{43} \\ -\frac{11}{2150} & \frac{180}{43} & -\frac{84}{43} \\ -\frac{3}{215} & \frac{100}{43} & \frac{240}{43} \end{pmatrix}$

b. On doit avoir $AX_{max} = B \iff A^{-1}AX_{max} = A^{-1}B \iff X_{max} = A^{-1}B$

donc $X_{max} = \begin{pmatrix} \frac{4}{1075} & -\frac{84}{43} & \frac{22}{43} \\ -\frac{11}{2150} & \frac{180}{43} & -\frac{84}{43} \\ -\frac{3}{215} & \frac{100}{43} & \frac{240}{43} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 224\,000 \\ 508 \\ 420 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{56} \\ \mathbf{160} \\ \mathbf{400} \end{pmatrix}$

Le service hospitalier peut, au maximum, prendre en charge 56 urgences de type P_1, 160 urgences de type P_2 et 400 urgences de type P_3

3. CORRECTION

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 1+0 \\ 1+0 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

Et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

2. On cherche $C = A \times G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ on a donc $\frac{a+c}{b+d} = \frac{2+1}{3+2} = \mathbf{\frac{3}{5}}$

3. a. $d(a+c) - c(b+d) = ad + cd - bc - cd = ad - bc = \Delta_M = \mathbf{1}$ **CQFD**

b. $M \times G = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & c \\ b+d & d \end{pmatrix}$

donc $\Delta_{M \times G} = d(a+c) - c(b+d)$ et d'après la question précédente : $\boldsymbol{\Delta_{M \times G} = 1}$

5. a.

Affichage		**gauche**	**droite**	**gauche**	**gauche**
m	4	**4**	**1**	**1**	**1**
n	7	**3**	**3**	**2**	**1**

b. L' algorithme semble donner le chemin à suivre dans l'arbre de Stern-Brocot à partir de la patrice unité jusqu'à obtenir la matrice correspondant à la fraction $\frac{m}{n}$

Pour $\frac{m}{n} = \frac{4}{7}$ On doit donc faire le trajet **« gauche - droite - gauche - gauche »**

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times G \times D \times G \times G = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ et donc $\frac{a+c}{b+d} = \frac{3+1}{5+2} = \mathbf{\frac{4}{7}}$