Savoir Sag. 7 : Limite d'une suite

Exercice 10 : Notion de limite d'une suite

Pour chacune des suites, conjecturer sur sa limite éventuelle.

1) À partir d'un tableau de valeurs.

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{3}{u_n}\right) \quad et \quad u_0 = 6$$

n	Un
0	6
1	3,25
2	2,086538462
3	1,76216324
4	1,732308093
5	1,732050827
6	1,732050808
7	1,732050808

$$v_n = n + 4\sin n$$

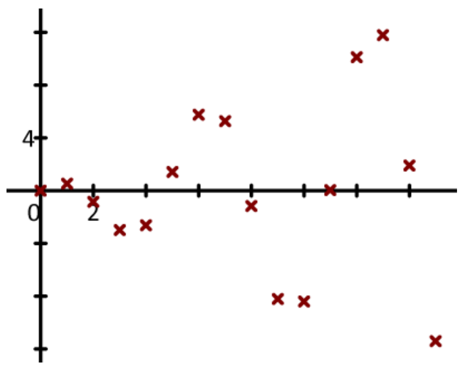
n	Vn
6	5,720584502
7	7,656986599
8	8,989358247
9	9,412118485
10	9,455978889
11	10,00000979
12	11,46342708
13	13,42016704

$$w_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^n$$

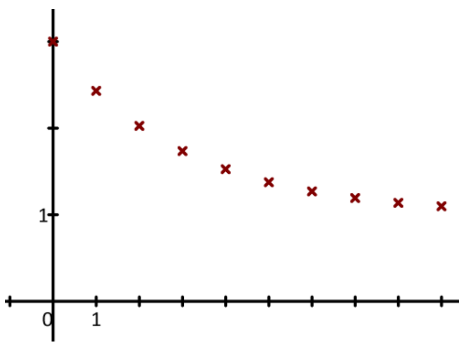
n	Vn
3	-3,375
4	5,0625
5	-7,59375
6	11,390625
7	-17,0859375
8	25,62890625
9	-38,44335938
10	57,66503906

2) À partir d'un graphique (formule explicite)

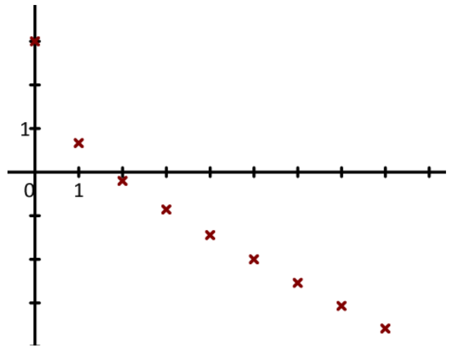
$$a_n = n \times cos\, n$$



$$b_n = 2e^{-\frac{n}{3}} + 1$$



$$c_n = \frac{n^2+1}{3-n}$$



Exercice 11 : Suites arithmétiques

Toutes les suites de cet exercice sont des suites arithmétiques. Déterminer leur limite

1) Suite	(u_n)	(a_n)	(b_n)	(v_n)
1^er terme et raison r	$r = 2$ $u_0 = 60$	$r = -3$ $a_0 = 25$	$r = 0,6$ $b_1 = -150$	$r = -\frac{2}{9}$ $v_0 = -3$
Limite				

2) Relation de récurrence	$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 \\ a_0 = 10 \end{cases}$	$\begin{cases} b_{n+1} = b_n - \frac{10}{3} \\ b_0 = 9 \end{cases}$	$\begin{cases} v_n = v_{n-1} - 0,001 \\ v_1 = 200\ 000 \end{cases}$	$\begin{cases} t_{n+1} = 2,3 + t_n \\ t_1 = 6 \end{cases}$
Limite				

3) Terme général	$a_n = 10 + 9n$	$b_n = 2(n-1) - 6$	$c_n = -120 - \frac{2n}{3}$	$d_n = 2 + \frac{n}{6}$
Limite				

Exercice 12 : Suites géométrique

Toutes les suites de cet exercice sont des suites géométriques. Déterminer leur limite

1) Suite	(u_n)	(a_n)	(b_n)	(v_n)
1er terme et raison q	$q = 2$ $u_0 = 60$	$q = 0{,}2$ $a_0 = 20$	$q = \frac{10}{7}$ $b_1 = -150$	$q = 10^{-1}$ $v_0 = -3$
Limite				

2) Relation de récurrence	$\begin{cases} a_n = 3\,a_{n-1} \\ a_0 = 10 \end{cases}$	$\begin{cases} b_{n+1} = \frac{7}{3}\,b_n \\ b_0 = -2 \end{cases}$	$\begin{cases} v_n = 0{,}4\,v_{n-1} \\ v_1 = 200\,000 \end{cases}$	$\begin{cases} t_{n+1} = -\dfrac{t_n}{3} \\ t_1 = 162 \end{cases}$
Limite				

3) Terme général	$a_n = 10 \times 9^n$	$b_n = -2 \times 1{,}65^{n-1}$	$u_n = 6 \times (-0{,}9)^n$	$v_n = 1500 \times 0{,}78^{n-1}$
Limite				

Exercice 13 : Contexte 1

À l'instant $t = 0$, on injecte à un patient une dose de 2 mg d'un médicament. On suppose que ce médicament se répartit uniformément dans le sang et que, chaque heure, le corps en élimine 25%. Pour tout entier n, on note R_n la masse en mg de médicament présente dans le sang au bout de n heures.

a) Montrer que la suite R_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer R_n en fonction de n.

c) Quel est le sens de variation de cette suite ? Interpréter concrètement le résultat.

d) Quelle est la limite de cette suite ? Interpréter concrètement le résultat.

Exercice 14 : Contexte 2

Une entreprise achète en début 2010 une machine-outil neuve pour 220 000 €. Le service comptable observe que, sur l'année 2010, la machine se déprécie (*ie.* perd de la valeur) d'environ 15%.
On suppose que cette baisse annuelle de 15% perdure au-delà de 2010.
On note V_n la valeur estimée de la machine au bout de n années de fonctionnement à partir de 2010.

1) Déterminer la nature de la suite, en préciser la raison et le 1er terme.

2) En déduire V_n en fonction de n

3) Calculer la valeur estimée de la machine en 2015. *Arrondir à l'euro près.*

4) Déterminer le sens de variation et la limite de cette suite. Interpréter concrètement les résultats.

Exercice 15 : Type bac 1

Pour limiter la hausse des températures moyennes de la planète, une diminution des émissions de gaz à effet de serre s'avère nécessaire. Dans ce but, le gouvernement français s'est donné comme objectif de diviser par quatre les émissions de gaz à effet de serre en France de 2006 à 2050.
En 2006, les émissions de gaz à effet de serre en France s'élevaient à 547 millions de tonnes d'équivalent CO_2 (dioxyde de carbone). (*Source : CITEPA*)

Partie A : Étude d'un premier modèle

Dans cette partie, on suppose que les émissions de gaz à effet de serre en France baisseront chaque année de 9,3 millions de tonnes à partir de l'année 2006.
Soit n un entier naturel. On note u_n les émissions de gaz à effet de serre en France au cours de l'année 2006 + n, en millions de tonnes d'équivalent CO_2 . Ainsi, $u_0 = 547$.

1. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser sa raison.

2. Exprimer u_n en fonction de n.

3. Déterminer, selon ce modèle, à partir de quelle année les émissions de gaz à effet de serre en France deviendront inférieures à cent millions de tonnes si la tendance se poursuit au-delà de 2050.

Partie B : Étude d'un second modèle

Dans cette partie, on suppose que le taux d'évolution annuel sera constant et que les émissions de gaz à effet de serre en France diminueront de 3,1% par an à partir de l'année 2006.
Soit n un entier naturel. On note v_n les émissions de gaz à effet de serre en France au cours de l'année 2006 + n, en millions de tonnes d'équivalent CO_2.
Ainsi, $v_0 = 547$.

Déterminer, selon ce modèle, à partir de quelle année les émissions de gaz à effet de serre deviendront inférieures à cent millions de tonnes.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Partie C : Limites

a) Donner la limite de la suite (v_n).

b) Que peut-on dire de la limite de la suite (u_n) ? Discuter la cohérence de ce résultat avec la situation modélisée.

Exercice 16 : Type bac 3

Un jeu vidéo fait évoluer un personnage sur un parcours semé d'obstacles.
Au début du parcours, ce personnage est doté de 1 000 pions noirs dans son sac et il n'a pas de pion blanc.
Le nombre de pions noirs diminue au cours du jeu.
Le personnage gagne 10 pions blancs par minute jouée.
Chaque partie est chronométrée et dure 45 minutes. Au bout des 45 minutes, la partie s'arrête et le joueur a gagné si le nombre de pions blancs gagnés est supérieur ou égal au nombre de pions noirs du sac.

1. Étude de l'évolution du nombre de pions blancs

On note u_n le nombre de pions blancs obtenus au bout de n minutes de jeu. Ainsi $u_0 = 0$.

Déterminer la nature de la suite (u_n) et en déduire, pour tout entier n, l'expression de u_n en fonction de n.

2. Étude de l'évolution du nombre de pions noirs

Lucas estime qu'au cours d'une partie, le nombre de ses pions noirs diminue de 2 % par minute.
Il voudrait savoir si cette évolution est suffisante pour gagner, ou s'il doit poursuivre son entraînement.
On note v_n le nombre de pions noirs restant à la n-ième minute. Ainsi $v_0 = 1000$.

a. Justifier que $v_1 = 980$.

b. Déterminer la nature de la suite (v_n) et en déduire, pour tout entier n, l'expression de v_n en fonction de n.

3. On a calculé les premiers termes des suites (u_n) et (v_n) à l'aide d'un tableur. La feuille de calcul est donnée ci-contre. Les termes de la suite (v_n) ont été arrondis à l'unité.
Lucas peut-il gagner la partie ?

	A	B	C
1	n	u_n	v_n
2	0	0	1 000
3	1	10	980
4	2	20	960
5	3	30	941
6	4	40	922
7	5	50	904
8	6	60	886
9	7	70	868
10	8	80	851
....			
....			
....			
41	39	390	455
42	40	400	446
43	41	410	437
44	42	420	428
45	43	430	419
46	44	440	411
47	45	450	403
48	46	460	395
49	47	470	387
50	48	480	379
51	49	490	372
52	50	500	364