

Corrigés Savoirs Fle. 2

Corrigé Exercice 7

- 1) • a) $-\ln x$ b) $-\ln(4x)$ c) $-\ln(x+2)$
- f) $\ln\left(\frac{1}{3}\right)$ g) $\ln\left(\frac{1}{2x}\right)$ h) $1 + \ln\left(\frac{2}{x+1}\right)$
- 2) • a) $\ln 5 + \ln x$ b) $\ln x - \ln 2$
- c) $\ln(2(x+3)) = \ln 2 + \ln(x+3)$ d) $\ln(x+1) - \ln(x-3)$
- g) $\ln 3x$ h) $\ln\left(\frac{3x}{6}\right) = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$ i) $\ln\left(\frac{7}{7x}\right) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$
- j) $\ln(x(3x-1)) = \ln(3x^2 - x)$
- 3) • a) $2 \ln x$ b) $\ln((2x)^2) = 2 \ln(2x)$ c) $3 \ln(e) = 3$
- f) $\ln(x^3)$ g) $2 \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2\right) = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$
- h) $\ln\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \ln(\sqrt{x})$

Un peu plus...

- d) $-\ln(2-3x)$ e) $-\ln e = -1$
- i) $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ j) $1 + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$
- e) $\ln 3 - \ln x$
- f) $\ln(x+4) + \ln(1-x)$
- k) $\ln\left(\frac{x}{x^2}\right) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$
- l) $\ln e + \ln(2x) = \ln(2ex)$
- d) $\ln\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\ln x}{2}$
- e) $-2 \ln(e) = -2$
- i) $\ln(x^4)$ j) $\ln\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right)$

Corrigé Exercice 8

1) $A = \ln(e^2) - \ln 8$
 $= 2 \ln e - \ln(2^3)$
 $= 2 - 3 \ln 2$

$B = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln(2e)$
 $= -\ln 2 + \ln 2 + \ln e$
 $= 1$

2) $A = \ln(x^2) + \ln(2x)$
 $= \ln(x^2 \times 2x)$
 $= \ln(2x^3)$

$B = \ln(3x-1) - \ln(x^3)$
 $= \ln\left(\frac{3x-1}{x^3}\right)$

$D = \ln(x \times 3x) - \ln(x^4)$
 $= \ln\left(\frac{3x^2}{x^4}\right)$
 $= \ln\left(\frac{3}{x^2}\right)$

$E = \ln\left(\frac{x+1}{2x}\right) + \ln(x^2)$
 $= \ln\left(\frac{x+1}{2x} \times x^2\right)$
 $= \ln\left(\frac{x^2+x}{2}\right)$

$$C = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \ln\frac{1}{4}$$

$$= \ln\sqrt{2} - \ln 2 - \ln 4$$

$$= \frac{1}{2} \ln 2 - \ln 2 - 2 \ln 2 = -\frac{5}{2} \ln 2$$

$$C = 2 \ln e - \ln(x+e)$$

$$= \ln(e^2) - \ln(x+e)$$

$$= \ln\left(\frac{e^2}{x+e}\right)$$

$$F = \ln\left(\frac{x+3}{3}\right) + \ln(x^2)$$

$$= \ln\left(\frac{x^2(x+3)}{3}\right)$$

- 3) a) $\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln\left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}\right) = \ln\left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}\right) = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$ CQFD
- b) $\ln(3+\sqrt{5}) + \ln(3-\sqrt{5}) = \ln((3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})) = \ln(9-5) = \ln 4 = \ln(2^2) = 2 \ln 2$ CQFD

4) Attention aux domaine de définition...

Pour la partie gauche de l'égalité, on doit avoir $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ et $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$: elle est définie sur $]1; +\infty[$

Alors que pour la partie droite, elle est définie sur $] -\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

L'égalité n'est vraie que pour $x > 1$, c'est-à-dire sur le plus petit domaine de définition commun...

Et c'est toujours le cas...

Corrigé Exercice 9

$$\begin{aligned} 1) f(x) - g(x) &= \ln(e+x) - (1 + \ln x) = \ln(e+x) - 1 - \ln x \\ &= \ln(e+x) - \ln e - \ln x = \ln\left(\frac{e+x}{ex}\right) = \ln\left(\frac{e}{ex} + \frac{x}{ex}\right) \\ &= \ln\left(\frac{e}{ex} + \frac{x}{ex}\right) = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{e}\right) \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) f(x) &= \ln\left(\frac{3x+1}{x+1}\right) = \ln(3x+1) - \ln(x+1) \\ f'(x) &= \frac{3}{3x+1} - \frac{1}{x+1} = \frac{3(x+1) - (3x+1)}{(3x+1)(x+1)} = \frac{3x+3-3x-1}{(3x+1)(x+1)} = \frac{2}{(3x+1)(x+1)} \end{aligned}$$

CQFD

Un peu plus...

$$\begin{aligned} g'(x) &= (1 - \ln x)^2 \\ &\quad + x \times 2 \times \left(-\frac{1}{x}\right)(1 - \ln x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= (1 - \ln x)^2 - 2(1 - \ln x) \\ &= (1 - \ln x)(1 - \ln x - 2) \\ &= (1 - \ln x)(-\ln x - 1) \\ &= (1 - \ln x)(-1)(\ln x + 1) \\ &= (-1 + \ln x)(\ln x + 1) \end{aligned}$$

CQFD

Corrigé Exercice 10

$$1) u_0 = \ln(5 \times 3^0) = \ln 5 \quad ; \quad u_1 = \ln(5 \times 3^1) = \ln 15 = \ln 3 + \ln 5$$

$$\text{et } u_2 = \ln(5 \times 3^2) = \ln 45 = \ln(3^2) + \ln 5 = 2\ln 3 + \ln 5$$

2) La suite semble être arithmétique de raison $\ln 3$ et de 1^{er} terme $\ln 5$... vérifions :

$$u_{n+1} = \ln(5 \times 3^{n+1}) = \ln(5 \times 3^n \times 3) = \ln(5 \times 3^n) + \ln 3 = u_n + \ln 3 \quad \text{CQFD}$$