

Savoir Ta. 3 : Montrer que deux expressions sont égales

Entraînement n°1

1) On donne $D = 2(3 - a)^2 + a^2 - (2a - 3)(a - 6)$. Montrer qu'on a, pour tout réel x , $D = a(3 + a)$

2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, on a :
$$\frac{x^2}{2 - x} - x = \frac{2x(x - 1)}{2 - x}$$

Entraînement n°2

1) On définit, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ la fonction $f(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{x-1}$.

Montrer qu'on a, pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$: $f(x) = x - 3 - \frac{x-3}{x-1}$

2) Montrer que, pour tout réel x , on a : $3(2x - 5) - 2(2x - 5)(x - 2) = 1 - 4(x - 3)^2$

Entraînement n°3

1) On donne $g(x) = (x - 3)^2 - (2x - 5)^2$. Montrer qu'on a, $\forall x$: $g(x) = (2 - x)^2 - (4 - 2x)(5 - 2x)$

2) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on a :
$$\frac{a^3 - 1}{1 - a} - a = \frac{(a^2 - 1)(a + 1)}{1 - a}$$

Entraînement n°4

1) Montrer qu'on a, pour tout réel x : $(2x - 1)^3 - (2x - 1)(3 - x)^2 = (2x - 1)(x + 2)(3x - 4)$

2) On définit, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$: $T(x) = \frac{1}{x}(2x - 3) - \frac{2}{x^2}$

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on a toujours :
$$T(x) = \frac{(x - 2)(2x + 1)}{x^2}$$

Savoir Ta. 3 : Corrigés

Corrigé Entraînement n°1

1) D'une part :

$$\begin{aligned} D &= 2(3-a)^2 + a^2 - (2a-3)(a-6) \\ D &= 2(9-6a+a^2) + a^2 - (2a^2-12a-3a+18) \\ D &= 18-12a+2a^2+a^2-2a^2+12a+3a-18 \\ D &= a^2+3a \end{aligned}$$

D'autre part : $a(3+a) = 3a + a^2 = D$

CQFD

2) D'une part :

$$\frac{x^2}{2-x} - x = \frac{x^2 - x(2-x)}{2-x} = \frac{x^2 - 2x + x^2}{2-x} = \frac{2x^2 - 2x}{2-x}$$

D'autre part :

$$\frac{2x(x-1)}{2-x} = \frac{2x^2 - 2x}{2-x}$$

On a bien égalité... **CQFD**

Corrigé Entraînement n°2

1) D'une part :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x-2)(x-3)}{x-1} = \frac{x^2 - 3x - 2x + 6}{x-1} \\ &= \frac{x^2 - 5x + 6}{x-1} \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} x-3 - \frac{x-3}{x-1} &= \frac{(x-3)(x-1) - (x-3)}{x-1} \\ &= \frac{x^2 - x - 3x + 3 - x + 3}{x-1} = \frac{x^2 - 5x + 6}{x-1} = f(x) \end{aligned}$$

CQFD

2) D'une part :

$$\begin{aligned} 3(2x-5) - 2(2x-5)(x-2) &= 6x - 15 - 2(2x^2 - 4x - 5x + 10) \\ &= 6x - 15 - 4x^2 + 8x + 10x - 20 \\ &= -4x^2 + 24x - 35 \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} 1 - 4(x-3)^2 &= 1 - 4(x^2 - 6x + 9) \\ &= 1 - 4x^2 + 24x - 36 \\ &= -4x^2 + 24x - 35 \end{aligned}$$

On a bien égalité... **CQFD**

Corrigé Entraînement n°3

1) D'une part :

$$\begin{aligned} g(x) &= (x-3)^2 - (2x-5)^2 \\ &= x^2 - 6x + 9 - (4x^2 - 20x + 25) \\ &= x^2 - 6x + 9 - 4x^2 + 20x - 25 \\ &= -3x^2 + 14x - 16 \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} (2-x)^2 - (4-2x)(5-2x) &= 4 - 4x + x^2 - (20 - 8x - 10x + 4x^2) \\ &= 4 - 4x + x^2 - 20 + 8x + 10x - 4x^2 \\ &= -3x^2 + 14x - 16 = g(x) \end{aligned}$$

CQFD

2) D'une part :

$$\begin{aligned} \frac{a^3-1}{1-a} - a &= \frac{a^3-1-a(1-a)}{1-a} = \frac{a^3-1-a+a^2}{1-a} \\ &= \frac{a^3+a^2-a-1}{1-a} \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\frac{(a^2-1)(a+1)}{1-a} = \frac{a^3+a^2-a-1}{1-a}$$

On a bien égalité... **CQFD**

Corrigé Entraînement n°4

1) D'une part :

$$\begin{aligned}(2x-1)^3 - (2x-1)(3-x)^2 &= (2x-1)(4x^2-4x+1) - (2x-1)(9-6x+x^2) \\ &= 8x^3 - 8x^2 + 2x - 4x^2 + 4x - 1 \\ &\quad - (18x - 12x^2 + 2x^3 - 9 + 6x - x^2) \\ &= 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 \\ &\quad - 18x + 12x^2 - 2x^3 + 9 - 6x + x^2 \\ &= \mathbf{6x^3 + x^2 - 18x + 8}\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}(2x-1)(x+2)(3x-4) &= (2x-1)(3x^2-4x+6x-8) \\ &= (2x-1)(3x^2+2x-8) \\ &= 6x^3+4x^2-16x-3x^2-2x+8 \\ &= \mathbf{6x^3+x^2-18x+8}\end{aligned}$$

On a bien égalité... **CQFD**

2) D'une part :

$$\begin{aligned}T(x) &= \frac{1}{x}(2x-3) - \frac{2}{x^2} = \frac{(2x-3)x-2}{x^2} \\ &= \frac{\mathbf{2x^2-3x-2}}{x^2}\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\frac{(x-2)(2x+1)}{x^2} &= \frac{2x^2+x-4x-2}{x^2} \\ &= \frac{\mathbf{2x^2-3x-2}}{x^2} = T(x)\end{aligned}$$

CQFD