

Savoirs Si. 3 : Théorèmes de comparaison

Exercice 7 : Application directe des théorèmes de comparaison

1) En utilisant quand c'est possible le théorème de comparaison des limites infinies, déterminer les limites des suites (u_n) telles que, pour tout n :

a) $u_n \geq 3n^2$	b) $u_n \leq -2\sqrt{n}$	c) $u_n \leq e^n$	d) $u_n \leq 1 - n$
e) $u_n \leq n^2(1 - n)$	f) $u_n \geq n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$	g) $u_n \geq 2 - n$	h) $u_n \geq 5^n$

2) En utilisant, quand c'est possible, le théorème des gendarmes, déterminer les limites des suites (u_n) telles que, pour tout n :

a) $1 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq 1 + \frac{1}{n}$	b) $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$	c) $1 - \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq u_n \leq 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$
d) $4 - \frac{n}{n^2+1} \leq u_n \leq 4 + \frac{1}{n+1}$	e) $e^{-n} \leq u_n \leq e^n$	f) $\frac{1}{n^2} \leq u_n \leq \frac{4}{n^2}$

3) Choisir le bon théorème pour déterminer la limites des suites (u_n) telles que, pour tout n :

a) $n - 1 \leq u_n \leq n + 1$	b) $2 - \frac{1}{2^n} \leq u_n \leq 2 + \frac{1}{2^n}$	c) $2 - n \leq u_n \leq 2 - n^2$
d) $5 \leq u_n \leq 5 + \frac{5}{n}$	e) $\frac{2n}{n^2+1} \leq u_n \leq \frac{2n+1}{n^2+1}$	f) $\ln n \leq u_n \leq \ln(2n)$

Exercice 8 : Comparaison et limites infinies

Attention : ne partez pas trop vite sur une démonstration par récurrence : beaucoup des inégalités et encadrements demandés peuvent s'obtenir avec les méthodes « classique »

1) $u_n = \sqrt{n^2 + 1}$.

Montrer que $u_n \geq n$ pour tout entier naturel n puis en déduire la limite de u_n .

2) $v_n = -3n^2 + (-1)^n$.

Montrer que $v_n \leq -3n^2 + 1$ pour tout entier naturel n puis en déduire la limite de v_n .

3) $w_n = n + \frac{\cos n}{n}$. Minorer w_n puis conclure sur sa limite éventuelle.

4) Comparer $a_n = -n^3 - \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ et $b_n = -n^3$, puis en déduire la limite de (a_n) .

5) On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$.

Démontrer par récurrence que, pour $n \geq 0$, on a $u_n \geq n^2$ et en déduire la limite de u_n .

Exercice 9 : Théorème des gendarmes

1) On donne $u_n = \frac{3+(-1)^n}{n}$. Justifier que, pour tout entier naturel non nul n , on a $\frac{2}{n} \leq u_n \leq \frac{4}{n}$.

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

2) Encadrer la suite $v_n = \frac{n+\cos(n)}{n}$ et en déduire sa limite.

3) (w_n) est définie par $w_n = \left(\frac{1}{1+n}\right)^n$. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $0 \leq w_n \leq \frac{1}{2^n}$ et en déduire la limite de la suite (w_n) .

4) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{n+2}$.

a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $0 < u_n \leq 1$.

b) En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq \frac{3}{n+2}$.

c) Montrer que la suite (u_n) converge.

5) On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k} = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}$.

a) De combien de termes se compose S_n ? Quelle est la limite de chacun de ces termes quand n tend vers $+\infty$? Que pensez-vous de $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$?

b) Quel est le plus petit des termes ? Quel est le plus grand ? En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $\frac{n^2}{n^2+n} \leq S_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$ et en déduire la limite de S_n . Était-ce le résultat attendu ?

Exercice 10: N^{elle} Calédonie - Nov 2015

On considère deux suites de nombres réels (d_n) et (a_n) définies par $d_0 = 300$, $a_0 = 450$.

et, pour tout entier naturel $n \geq 0$

$$\begin{cases} d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n + 100 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{2}a_n + 70 \end{cases}$$

1. Calculer d_1 et a_1 .

2. On souhaite écrire un algorithme qui permet d'afficher en sortie les valeurs de d_n et a_n pour une valeur entière de n saisie par l'utilisateur.

L'algorithme suivant est proposé :

a. Quels nombres obtient-on en sortie de l'algorithme pour $n = 1$?

Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux obtenus à la question 1. ?

b. Expliquer comment corriger cet algorithme pour qu'il affiche les résultats souhaités.

3. a. Pour tout entier naturel n , on pose $e_n = d_n - 200$. Montrer que la suite (e_n) est géométrique.

b. En déduire l'expression de d_n en fonction de n .

c. La suite (d_n) est-elle convergente ? Justifier.

4. On admet que pour tout entier naturel n ,

$$a_n = 100n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 110 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 340$$

a. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a $2n^2 \geq (n+1)^2$.

b. Montrer par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égal à 4, $2^n \geq n^2$.

c. En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 4, $0 \leq 100n \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{100}{n}$.

d. Étudier la convergence de la suite (a_n) .

Variables :	n et k sont des entiers naturels D et A sont des réels
Initialisation :	D prend la valeur 300 A prend la valeur 450 Saisir la valeur de n
Traitement :	Pour k variant de 1 à n D prend la valeur $\frac{D}{2} + 100$ A prend la valeur $\frac{A}{2} + \frac{D}{2} + 70$ Fin pour
Sortie :	Afficher D Afficher A