Exercice 11 : Récurrences et sens de variations

1) Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$

Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante pour tout n.

2) Soit la suite (v_n) définie par $v_1 = 2$ et pour tout entier naturel n non nul par : $v_{n+1} = 2v_n - 1$.
Montrer par récurrence que la suite est croissante.

Pour aller plus loin…

4) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 1 \end{cases}$
Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante pour tout n.

3) **a.** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

b. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln({u_n}^2 + 1)$
Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.
Que peut-on en conclure ?

Exercice 12 : Autre méthodes

1) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$ pour tout entier naturel n.

a. Montrer l'inégalité $1 \leq u_n \leq 2$.

b. Montrer que, pour tout n entier naturel, on a : $u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$.

c. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

2) Soit la suite (v_n) définie par $v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n non nul par : $v_{n+1} = 3\sqrt{v_n}$.
On admet que, pour tout entier n, $0 < v_n \leq 9$. En déduire que la suite (v_n) est croissante.

Exercice 13 : Extrait bac Amérique du Sud 2014

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}{u_n}^2 + 3u_n - \frac{3}{2} \end{cases}$

1) Calculer les valeurs exactes, en fraction irréductible, de u_1 et u_2.

2) Donner une valeur approchée à 10^{-5} près des termes u_3 et u_4.

3) Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

4) On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 3$.

a. Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\frac{1}{2}{v_n}^2$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $-1 \leq v_n \leq 0$.

c. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $v_{n+1} - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right)$.

d. En déduire le sens de variation de (v_n) puis celui de (u_n).