Savoir Nc.1 – Calculer avec des complexes

Théorème (admis), définition et notations

Il existe un ensemble de nombres, appelé **nombres complexes** et noté Ê, tel que :

- ► ℝ ⊂ Ê
- ► il existe dans Ê un nombre noté i et tel que $\boldsymbol{i^2 = -1}$
- ► tout nombre z de Ê s'écrit de manière unique sous la forme $\boldsymbol{z = x + iy}$ (dite forme algébrique), où x et y sont des réels

  $\boldsymbol{x}$ est appelé la **partie réelle** de z et est notée $\boldsymbol{Re(z)}$

  $\boldsymbol{y}$ est appelé la **partie imaginaire** de z et est notée $\boldsymbol{Im(z)}$

Exemples : $z_1 = 3 - 2i$ $\qquad z_2 = i - \frac{7}{2}$ $\qquad z_3 = 5 + 3i - \sqrt{2} + ia$

Prop/Déf

- ► z est un **nombre réel** $\Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \boldsymbol{Im(z) = 0} \Leftrightarrow z = x$
- ► z est un **imaginaire pur** $\Leftrightarrow z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \boldsymbol{Re(z) = 0} \Leftrightarrow z = iy$

Ex : $z = (a^2 - 1) + i(2b - 4)$*, déterminer a tel que $z \in \mathbb{R}$*

Propriétés

- ► $\boldsymbol{z = 0} \Leftrightarrow x = y = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{Re(z) = Im(z) = 0}$
- ► $\boldsymbol{z = z'} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x = x'} \\ \boldsymbol{y = y'} \end{cases}$

Exemples : $z = 5 - 2a + (b + 3)i$ *déterminer a et b tels que* $z = 1 - 5i$

Règles d'opérations $\qquad \boldsymbol{i^2 = -1}$

Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$

Addition : $z + z' = \boldsymbol{(x + x') + i(y + y')}$

Multiplication : $zz' = (x + iy) \times (x' + iy') = \boldsymbol{(xx' - yy') + i(xy' + x'y)}$

Dem. $zz' = (x + iy) \times (x' + iy') = xx' + ixy' + ix'y + i^2yy' = xx' + i(xy' + x'y) + (-1) \times yy'$

$zz' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$

Exemples : 1) $z_1 = 3$; $z_2 = -2i$; $z_3 = 2 - i$ *et* $z_4 = -2 + 4i$

Calculer $z_2 + z_3$; $z_4 - z_3$; $z_2 z_3$; $z_1 - z_2^2$

2) Fonctions dans Ê : $f(z) = (1 + 2i)z \Rightarrow$ *déterminer* $f(-3)$; $f(2 - i)$