Corrections Savoir C. 4

Corrigé Exercice 17

Attention : il existe plusieurs façons de résoudre une équation, et on a souvent le choix entre développer (et se retrouver avec un polynôme du 2nd degré) et factoriser (et se retrouver avec un produit)... à vous de voir !

a. $4x^2+2x-1<1 \Leftrightarrow 4x^2+2x-2<0$

$\Rightarrow \Delta = 36;\ x_1=\frac{1}{2}\ et\ x_2=-1$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$4x^2+2x-2$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	

$\boldsymbol{S} = \left]\mathbf{-1}\,;\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right[$

b. définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$3-x^2-2x$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
Quotient		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\Vert$	$-$	

On cherche le quotient négatif ou nul

S = [−3 ; 1[∪]1 ; +∞[*(la valeur 1 est interdite)*

c) Domaine de définition : $\mathbb{R}\backslash\{0\,;1\}$

$\frac{3x+6}{3x} < \frac{x+2}{x-1} \Leftrightarrow \frac{3x+6}{3x} - \frac{x+2}{x-1} < 0$

$\Leftrightarrow \frac{(3x+6)(x-1)-3x(x+2)}{3x(x-1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{-3x-6}{3x(x-1)} < 0$

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$-3x-6$		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	
$3x$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x-1$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
Q		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	

$\boldsymbol{S} =]\mathbf{-2}\,;\ \mathbf{0}[\cup]\mathbf{1}\,;\ +\infty[$

d) $\Leftrightarrow (2x-1)^2 - (1-3x)^2 > 0 \Leftrightarrow -x(5x-2) > 0$

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	
$5x-2$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
produit		$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	

$\boldsymbol{S} = \left]\mathbf{0}\,;\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\right[$

Un peu plus, si besoin…

a) $(2-x)(3x+6) \le (3x+6) \Leftrightarrow (2-x)(3x+6) - (3x+6) \le 0 \Leftrightarrow (3x+6)(-x+1) \le 0$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$3x+6$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$-x+1$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
produit		$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	

$\boldsymbol{S} =]-\infty\,;\ \mathbf{-2}]\ \cup\ [\mathbf{1}\,;\ +\infty\,[$

b) L'inéquation est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-5\,;-1\}$

$\frac{2x}{1+x} < \frac{3-x}{x+5} \Leftrightarrow \frac{2x(x+5)-(3-x)(1+x)}{(1+x)(x+5)} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2+10x-(-x^2+2x+3)}{(x+1)(x+5)} < 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2+8x-3}{(x+1)(x+5)} < 0$

x	$-\infty$		-5		-3		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x^2+8x-3$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x+5$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$\frac{3x^2+8x-3}{(x+1)(x+5)}$		$+$	$\Vert$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$\Vert$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	

$\boldsymbol{S} =]\mathbf{-5}\,;\ \mathbf{-3}[\cup]\mathbf{1}\,;\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}[$

c) $\frac{2(x+1)}{(1-x)^2} \geq 2$ Domaine de définition : $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ $\Leftrightarrow \frac{2(x+1)}{(1-x)^2} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2(x+1)-2(1-x)^2}{(1-x^2)} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{-2x^2+6x}{(1-x)^2} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \frac{2x(-x+3)}{(1-x)^2} \geq 0$

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$-x+3$		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$(1-x)^2$		$+$	$\vert$	$+$	0	$+$	$\vert$	$+$	
Q		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$$S = [\mathbf{0}\,;\,\mathbf{1}[\cup]\mathbf{1}\,;\,\mathbf{3}]$$

Corrigé Exercice 18

a) $D_f = D_g = \mathbb{R}$

* On a : $f(x) - g(x) = x^2 + 9 - 6x = (x-3)^2$. $\Rightarrow$ $f(x) - g(x)$ est donc toujours positif et s'annule pour $x = 3$.

* La courbe C_f est donc toujours au-dessus de la courbe C_g. De plus, les deux courbes se croisent en $x = 3$.
Les coordonnées du point d'intersection sont : M (3 ; 18).

b) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$; $D_g = \mathbb{R}$

*On a : $f(x) - (4x+2) = \frac{2x+1}{x-2} - \frac{(\mathbf{4x+2})(x-2)}{x-2} = \frac{-4x^2+8x+5}{x-2}$

Pour le numérateur : $\Delta = 64 + 4\times 20 = 144$ et $x_1 = \frac{-8+12}{-8} = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{-8-12}{-8} = \frac{5}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$-4x^2+8x+5$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$x-2$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f(x)-g(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

* C_f est donc au-dessus de la droite (d) sur $\left]-\infty\,;\,-\frac{1}{2}\right]$ et sur $\left]2\,;\frac{5}{2}\right]$ et elle est en-dessous ailleurs.
Il y a deux points d'intersection entre C_f et (d) : $M_1\left(-\frac{1}{2}\,;\,0\right)$ *et* $M_2\left(\frac{5}{2}\,;\,12\right)$.

Un peu plus, si besoin ...

c) $D_f = D_g = \mathbb{R}$

$f(x) - g(x) = 2x^2 - 7x + 3 - (x^2 - 2x + 9) = x^2 - 5x - 6 \Rightarrow \Delta = 49$ et $x_1 = -1$; $x_2 = 6$

x	$-\infty$		-1		6		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc C_f est donc au-dessus de C_g sur]–∞ ; – 1] et sur [6 ; +∞[et elle est en-dessous ailleurs.

Corrigé Exercice 19

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\}$

1. $g(x) = 2x + 1$

3. a. Mettre au même dénominateur

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$9 - 4x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$2x - 1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x) - g(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

b. C_f est au dessus de C_g sur l'intervalle $]-\infty\,;-\frac{3}{2}\,] \cup\,]\,\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\,]$

Piste et solutions Exercice 20

1) Le coefficient de degré 2 doit être égal à zéro

Solution : Si $\alpha = 0$, R n'est pas un polynôme du second degré

2) Exprimer Δ en fonction de α ainsi que les deux racines

Solution : $\Delta = 4(\alpha + 1)^2 - 4\alpha(\alpha + 2) = 4 > 0$

On a $x_1 = \frac{2(\alpha + 1) + 2}{2\alpha} = \frac{\alpha + 2}{\alpha}$ et $x_2 = \frac{2(\alpha + 1) - 2}{2\alpha} = 1$

Les racines de R sont 1 et $\frac{\alpha + 2}{\alpha}$

3) Il faut commencer par déterminer laquelle des deux racines est la plus petite. Ensuite, le signe d'un polynôme est celui de son coefficient de degré 2 (ici α) à l'extérieur des racines…

Solution : Pour savoir quelle racine est la plus petite, on étudie le signe de leur différence

$1 - \frac{\alpha + 2}{\alpha} = \frac{\alpha - \alpha - 2}{\alpha} = \frac{-2}{\alpha}$ *si $\alpha < 0$ on a alors $1 > \frac{\alpha + 2}{\alpha}$*

Comme R est du signe de α à l'extérieur de ses racines,

R est négatif sur $]-\infty\,;\frac{\alpha + 2}{\alpha}]U[1;+\infty[$ et R est positif dur $[\frac{\alpha + 2}{\alpha};1]$