Corrigé Exercice 9

1 a) $2iz = 1 - z$
$\Leftrightarrow\ 2iz + z = 1$
$\Leftrightarrow\ z(1+2i) = 1$
$\Leftrightarrow\ z = \frac{1}{1+2i}$
$z = \frac{1-2i}{1+4}$
$z = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$
$\Rightarrow\ S = \left\{\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i\right\}$

b) $3z + 5i = 4 - z + i$
$\Leftrightarrow\ 4z = 4 - 4i$
$\Leftrightarrow\ z = 1 - i$
$\Rightarrow\ S = \{1 - i\}$

c) $2i + 3z = i(5 - iz)$
$\Leftrightarrow\ 2i + 3z = 5i + z$
$\Leftrightarrow\ 2z = 3i$
$\Leftrightarrow\ z = \frac{3}{2}i$
$\Rightarrow\ S = \left\{\frac{3}{2}i\right\}$

d) $(z-2)(z+i) = 0$
$\Leftrightarrow\ z - 2 = 0\ ou\ z + i = 0$
$\Leftrightarrow\ z = 2\ ou\ z = -i$
$S = \{2; -i\}$

2) a. $\begin{cases} 2z + 3z' = 3 + 8i \\ 5z - z' = -1 + 3i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z + 3(1 - 3i + 5z) = 3 + 8i \\ z' = 1 - 3i + 5z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17z + 3 - 9i = 3 + 8i \\ z' = 1 - 3i + 5z \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 17z = 17i \\ z' = 1 - 3i + 5z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = i \\ z' = 1 - 3i + 5i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = i \\ z' = 1 + 2i \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2a + 3b = 1 \\ a - b = i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(i + b) + 3b = 1 \\ a = i + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5b = 1 - 2i \\ a = i + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i \\ a = i + \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i \\ a = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i \end{cases}$

3) a) $z = 2\bar{z} + 1 \ \Leftrightarrow\ x + iy = 2(x - iy) + 1$
$\Leftrightarrow x + iy = 2x + 1 - 2iy$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x + 1 \\ y = -2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \ \Rightarrow\ S = \{-1\}$

b) $z + 2\bar{z} = 3 - 4i$
$\Leftrightarrow\ x + iy + 2(x - iy) = 3 - 4i$
$\Leftrightarrow\ 3x - iy = 3 - 4i$
$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 3 \\ -y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \ \Rightarrow\ S = \{1 + 4i\}$

Corrigé Exercice 10

1) **a)** $z^2 = -1 \ \Rightarrow\ z = i\ ou\ z = -i \ \Rightarrow\ S = \{-i; i\}$

b) $z^2 = -9 \Leftrightarrow\ z = 3i\ ou\ z = -3i \ \Rightarrow\ S = \{-3i; 3i\}$

c) $z^2 - 2 = 0 \ \Leftrightarrow\ z^2 = 2$ (deux solutions réelles) $\Leftrightarrow\ z = \sqrt{2}\ ou\ z = -\sqrt{2} \ \Rightarrow\ S = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$

d) $z^2 - 2z + 2 = 0 \ \Rightarrow\ \Delta = -4$ donc 2 solutions complexes conjuguées :
$z_1 = \frac{2 + i\sqrt{4}}{2} = 1 + i$ et $z_2 = 1 - i \ \Rightarrow\ S = \{1 + i\, ; 1 - i\}$

e) $z^2 = z - 1 \ \Leftrightarrow\ z^2 - z + 1 = 0 \ \Rightarrow\ \Delta = -3$ donc 2 solutions complexes conjuguées :
$z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \ \Rightarrow\ S = \left\{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

f) $z^2 + 4z = -5 \ \Leftrightarrow\ z^2 + 4z + 5 = 0 \ \Rightarrow\ \Delta = -4$ donc 2 solutions complexes conjuguées :
$z_1 = \frac{-4 + i\sqrt{4}}{2} = -2 + i$ et $z_2 = -2 - i \ \Rightarrow\ S = \{-2 + i; -2 - i\}$

2) a. $(z - 3)(z^2 - 2z + 3) = z^3 - 2z^2 + 3z - 3z^2 + 6z - 9 = z^3 - 5z^2 + 9z - 9 = P(z)$ CQFD

b. $P(z) = 0 \ \Leftrightarrow\ (z - 3)(z^2 - 2z + 3) = 0 \ \Leftrightarrow\ z - 3 = 0\ ou\ z^2 - 2z + 3 = 0$

$\Leftrightarrow\ z = 3\ \ ou\ \ \Delta = -8$ deux solutions complexes : $z_1 = \frac{2 + i\sqrt{8}}{2} = 1 + i\sqrt{2}$ et $z_2 = 1 - i\sqrt{2}$
$\Rightarrow\ S = \{3\, ; 1 + i\sqrt{2}; 1 - i\sqrt{2}\}$

c. $P(z) = (z - 3)(z - 1 - i\sqrt{2})(z - 1 + i\sqrt{2})$

3) $f(z) = 2 \ \Leftrightarrow\ z + \frac{5}{z} = 2 \ \Leftrightarrow\ z^2 + 5 = 2z \ \Leftrightarrow\ z^2 - 2z + 5 = 0$ on calcule $\Delta = -16$
$\Rightarrow$ 2 racines complexes conjuguées $z_1 = \frac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i$ et $z_2 = 1 - 2i \ \Rightarrow\ S = \{1 - 2i; 1 + 2i\}$

Corrigé Exercice 11

1) a) $\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}+5=0 \overset{\times z^2}{\Leftrightarrow} \frac{z^2}{z^2}-\frac{2z^2}{z}+5z^2=0 \Leftrightarrow 1-2z+5z^2=0 \Rightarrow \Delta=-16$

donc 2 solutions complexes conjuguées : $z_1=\frac{2+i\sqrt{16}}{10}=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$ et $z_2=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i \Rightarrow S=\left\{\boldsymbol{\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i\,;\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i}\right\}$

b) $z^4+z^2-6=0$ en posant $\mathcal{Z}=z^2$ on obtient l'équation $\mathcal{Z}^2+\mathcal{Z}-6=0 \Rightarrow \Delta=25$

donc 2 solutions réelles : $\mathcal{Z}_1=\frac{-1+5}{2}=2$ et $\mathcal{Z}_2=\frac{-1-5}{2}=-3$

On a donc $z_1{}^2=2 \Leftrightarrow z_1=\sqrt{2}$ *ou* $z_1{}'=-\sqrt{2}$ et $z_2{}^2=-3 \Leftrightarrow z_2=i\sqrt{3}$ *ou* $z_2{}'=-i\sqrt{3}$

$\Rightarrow S=\{\boldsymbol{-\sqrt{2};\ \sqrt{2};\ i\sqrt{3};\ -i\sqrt{3}}\}$

c) $\begin{cases} z_1+z_2=6 \\ z_1z_2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1=6-z_2 \\ (6-z_2)z_2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1=6-z_2 \\ 6z_2-z_2{}^2=13 \end{cases}$

On résout : $6z_2-z_2{}^2=13 \Leftrightarrow z_2{}^2-6z_2+13=0 \Rightarrow \Delta=-16$

donc 2 solutions complexes conjuguées : $z_2=\frac{6+i\sqrt{16}}{2}=3+2i$ et $z_2{}'=3-2i$

Deux solutions possibles pour z_1 : $z_1=6-z_2=6-(3+2i)=3-2i$ et $z_1'=6-z_2'=3+2i$

On a donc deux couples de solutions : $(\boldsymbol{z_1=3-2i; z_2=3+2i})$ et $(\boldsymbol{z_1'=3+2i; z_2=3-2i})$

2) a. $(z+i)(az^2+bz+c)=az^3+bz^2+cz+aiz^2+biz+ci=az^3+(b+ai)z^2+(c+bi)z+ci$

En identifiant les coefficients, on a : $\begin{cases} a=1 \\ b+ai=-6+i \\ c+bi=13-6i \\ ci=13i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b+i=-6+i \\ 13+bi=13-6i \\ c=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-6 \\ c=13 \end{cases}$

On a donc : $P(z)=(z+i)(z^2-6z+13)$

b. $P(z)=0 \Leftrightarrow (z+i)(z^2-6z+13)=0 \Leftrightarrow z+i=0$ *ou* $z^2-6z+13=0$

$\Leftrightarrow z=-i$ $\qquad \Delta=-16$ deux solutions complexes

$\Leftrightarrow$ $\qquad z_1=\frac{6+i\sqrt{16}}{2}=3+2i$ *ou* $z_2=3-2i$

$S=\{\boldsymbol{-i;3+2i;3-2i}\}$