Croissances comparées

► Étude de la fonction $f : x \mapsto xe^x$

f définie sur $\mathbb{R}$

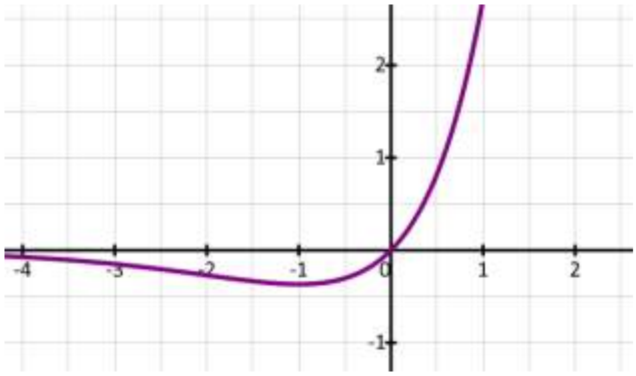
$f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$ donc décroissante sur $]-\infty; -1]$ et croissante sur $[-1; +\infty[$

Minimum $f(-1) = -\frac{1}{e}$

Par produit de limite $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^x = +\infty$

Limite à connaître par cœur : $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0}$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
xe^x	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$



► Étude de la fonction $g : x \mapsto \frac{e^x}{x}$

g définie sur $\mathbb{R}^*$

$g'(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$ donc décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$

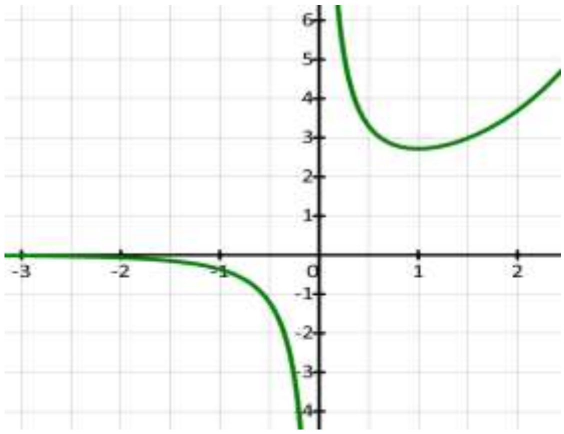
Minimum $g(1) = e$

Par produit de limite $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$

Et aussi $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Limite à connaître par cœur : $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}} = +\infty$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\frac{e^x}{x}$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$



La fonction exponentielle « écrase » x

► Étude de la fonction $h: x \mapsto x \ln x$

h définie sur $]0; +\infty[$

$h'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$ or $\ln x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{e}$

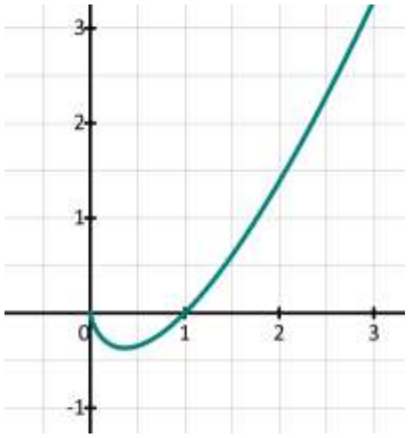
donc décroissante sur $\left]-\infty; \frac{1}{e}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$

Minimum $h\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$

Par produit de limite $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln x = +\infty$

Limite à connaître par cœur : $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0}$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$x \ln x$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$



► Étude de la fonction $i : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$

i définie sur $]0; +\infty[$

$i'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ or $1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq e$

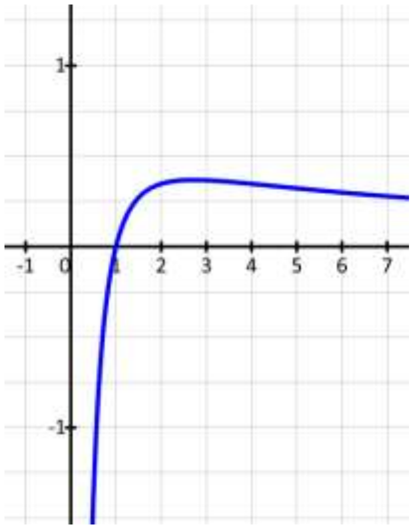
donc croissante sur $]0\,; e]$ et décroissante sur $[e\,; +\infty[$

Maximum $i(e) = \frac{1}{e}$

Par produit de limite $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$

Limite à connaître par cœur : $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0}$

x	0		e		$+\infty$
$x \ln x$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0



x « écrase » la fonction logarithme