Savoir Nc. 1 - Calculs

Entraînement 1

1) Calculer puis donner l'écriture algébrique des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 3 + \frac{2}{3}i - (4 - i) \qquad z_2 = 1 - 2i(2 - i) \qquad z_3 = (4 - 3i)^2$$

2) On donne $Z = 3a - 2ib - 1 + 3i$, avec a et b réels. Déterminer a et b tels que $Z = 4 + i$

3) On donne la fonction dans Ê définie pour tout nombre complexe z par : $f(z) = 3 + i(z - 1)$

a) Calculer $f(-2 + 3i)$

b) Déterminer la forme algébrique de l'image de $z = 1 - i$ par f

4) Soit t un réel tel que $\mathcal{Z} = 2t - 3i + 4 - t^2 i$

a) Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de t le complexe $\mathcal{Z}$ est-il réel.

b) Déterminer m tel que $\mathcal{Z} \in i\mathbb{R}$

Entraînement 2

1) Calculer puis donner l'écriture algébrique des nombres complexes suivants :

$$z_1 = (4 - i)(2 + 3i) \qquad z_2 = i(1 - 2i) + 3 - \frac{i}{2} \qquad z_3 = (5 + 4i)^2$$

2) On donne $\mathcal{Z} = 2a - 5ib - 1 + 7i$, avec a et b réels. Déterminer a et b tels que $\mathcal{Z} = 3 + 2i$

3) On donne la fonction dans Ê définie pour tout nombre complexe z par : $f(z) = 3 + i(z - 1)$

Calculer l'image de $z = 1 - i$ par f

4) Soit m un réel tel que $\mathcal{Z} = (2m + i)(1 - 2mi)$

a) Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de m le complexe $\mathcal{Z}$ est-il un imaginaire pur.

b) Déterminer m tel que $\mathcal{Z} \in \mathbb{R}$

Corrigé Savoir Nc.1

Corrigé Entraînement 1

1) $z_1 = 3 + \frac{2}{3}i - (4 - i) = 3 + \frac{2}{3}i - 4 + i$

$z_1 = -1 + \left(\frac{2}{3} + 1\right)i = \boldsymbol{-1 + \frac{5}{3}i}$

$z_2 = 1 - 2i(2 - i)$

$z_2 = 1 - 4i - 2$

$z_2 = \boldsymbol{-1 - 4i}$

$z_3 = (4 - 3i)^2$

$z_3 = 16 - 24i + 9i^2$

$z_3 = \boldsymbol{7 - 24i}$

2) $Z = 3a - 2ib - 1 + 3i = 4 + i \Leftrightarrow (3a - 1) + i(3 - 2b) = 4 + i \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 1 = 4 \\ 3 - 2b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{a = \frac{5}{3}} \\ \boldsymbol{b = 1} \end{cases}$

3) **a)** $f(-2 + 3i) = 3 + i(-2 + 3i - 1) = 3 - 2i + 3i^2 - i = \boldsymbol{-3i}$

b) $f(1 - i) = 3 + i(1 - i - 1) = 3 + i(-i) = \boldsymbol{4}$

4) $\mathcal{Z} = 2t - 3i + 4 - t^2 i = (2t + 4) + (-3 - t^2)i$

a) $\mathcal{Z}$ est réel $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}(\mathcal{Z}) = 0 \Leftrightarrow -3 - \mathrm{t}^2 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{t}^2 = -3$ L'équation n'a pas de solution : il n'y a **aucune valeur de t pour laquelle le complexe $\mathcal{Z}$ peut-être un réel.**

b) $\mathcal{Z} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Re(\mathcal{Z}) = 0 \Leftrightarrow 2t + 4 = 0 \Leftrightarrow 2t = -4 \Leftrightarrow \boldsymbol{t = -2}$

Corrigé Entraînement 2

1) $z_1 = (4 - i)(2 + 3i)$

$z_1 = 8 + 12i - 2i - 3i^2$

$z_1 = \boldsymbol{11 + 10i}$

$z_2 = i - 2i^2 + 3 - \frac{i}{2}$

$z_2 = i + 2 + 3 - \frac{i}{2} = 5 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)i$

$z_2 = \boldsymbol{5 + \frac{1}{2}i}$

$z_3 = (5 + 4i)^2$

$z_3 = 25 + 40i + 16i^2$

$z_3 = \boldsymbol{9 + 40i}$

2) $\mathcal{Z} = 2a - 5ib - 1 + 7i = (2a - 1) + i(7 - 5b) = 3 + 2i \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 1 = 3 \\ 7 - 5b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 4 \\ -5b = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{a = 2} \\ \boldsymbol{b = 1} \end{cases}$

3) $f(1 - i) = 3 + i(1 - i - 1) = 3 + i(-i) = \boldsymbol{4}$

4) $\mathcal{Z} = (2m + i)(1 - 2mi) = 2m - 4m^2 i + i - 2mi^2 = \boldsymbol{4m + (1 - 4m^2)i}$

a) $\mathcal{Z}$ imaginaire pur $\Leftrightarrow Re(\mathcal{Z}) = 0 \Leftrightarrow 4m = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{m = 0}$

b) $\mathcal{Z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(\mathcal{Z}) = 0 \Leftrightarrow 1 - 4m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \boldsymbol{m = \frac{1}{2}}$ ou $\boldsymbol{m = -\frac{1}{2}}$