

Corrigé Exercice 1

$$\begin{aligned}
 \text{a) } z &= 6 + 4i + 1 - 4i = \mathbf{7} & \text{b) } z &= \sqrt{3} + i + \sqrt{3} + i = \mathbf{2\sqrt{3} + 2i} & \text{c) } z &= 3i + 2i^2 = 3i + 2 \times (-1) = \mathbf{-2 + 3i} \\
 \text{d) } z &= -2i + 6i^2 = \mathbf{-6 - 2i} & \text{e) } z &= 3 - i + 6i - 2i^2 = 3 + 5i + 2 = \mathbf{5 + 5i} & \text{f) } z &= -1 + 4i - \frac{1}{2}i + 2i^2 = -1 - 2 + i\left(4 - \frac{1}{2}\right) = \mathbf{-3 + \frac{7}{2}i} \\
 \text{g) } z &= (2 - i)(4i - 4 + i^2 - i) = (2 - i)(-5 + 3i) = -10 + 6i + 5i - 3i^2 = \mathbf{-7 + 11i} & \text{h) } z &= 9 + 12i + 4i^2 = 9 - 4 + 12i = \mathbf{5 + 12i} & \text{j) } z &= 4 - 25i^2 = 4 + 25 = \mathbf{29} \\
 \text{ou, } z &= (8 + 2i - 4i - i^2)(i - 1) = (9 - 2i)(i - 1) = 9i - 9 - 2i^2 + 2i = \mathbf{-7 + 11i}
 \end{aligned}$$

En bonus : $z = (1 - i)(1 - 2i + i^2) = (1 - i)(-2i) = -2i + 2i^2 = \mathbf{-2 - 2i}$

Savoir Nc. 1 : Corrections 2

Exercice 2 : Identifier parties réelle et imaginaire

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \operatorname{Re}(2 + i) &= \mathbf{2} \text{ et } \operatorname{Im}(2 + i) = \mathbf{1} \\
 \text{b) } \operatorname{Re}(5i - 3) &= \mathbf{-3} \text{ et } \operatorname{Im}(5i - 3) = \mathbf{5} \\
 \text{c) } \operatorname{Re}\left(\frac{i}{2}\right) &= \mathbf{0} \text{ et } \operatorname{Im}\left(\frac{i}{2}\right) = \mathbf{\frac{1}{2}} \text{ imaginaire pur} \\
 \text{d) } \operatorname{Re}(4 - \sqrt{3}) &= \mathbf{4 - \sqrt{3}} \text{ et } \operatorname{Im}(4 - \sqrt{3}) = \mathbf{0} \text{ réel} \\
 \text{e) } z = \frac{4}{2} - \frac{3}{2}i &= 2 - \frac{3}{2}i \text{ donc } \operatorname{Re}\left(2 - \frac{3}{2}i\right) = \mathbf{2} \text{ et } \operatorname{Im}\left(2 - \frac{3}{2}i\right) = \mathbf{-\frac{3}{2}} \\
 \text{f) } z = 1 + 2i &\text{ donc } \operatorname{Re}(1 + 2i) = \mathbf{1} \text{ et } \operatorname{Im}(1 + 2i) = \mathbf{2} \\
 \text{g) } z = 2 \times (-1) + i + 2 &= i \text{ Donc } \operatorname{Re}(i) = \mathbf{0} \text{ et } \operatorname{Im}(i) = \mathbf{1} \text{ imaginaire pur} \\
 \text{h) } z = i^3 - 1 + i &= -1 + (-1) \times i + i = -1 \text{ Donc } \operatorname{Re}(z) = \mathbf{-1} \text{ et } \operatorname{Im}(z) = \mathbf{0} \text{ réel} \\
 \text{i) } z = \frac{4}{3} + i \frac{-\sqrt{3}+1}{2} &\text{ Donc } \operatorname{Re}(z) = \mathbf{\frac{4}{3}} \text{ et } \operatorname{Im}(z) = \mathbf{\frac{-\sqrt{3}+1}{2}} \\
 \text{j) } \operatorname{Re}(z) &= \mathbf{a - 2} \text{ et } \operatorname{Im}(z) = \mathbf{1 - b} \\
 \text{k) } z = 3t + i(-t + 2) &\text{ Donc } \operatorname{Re}(z) = \mathbf{3t} \text{ et } \operatorname{Im}(z) = \mathbf{-t + 2}
 \end{aligned}$$

Exercice 3 : Réfléchir sur les parties réelle et imaginaire

- 1) a. z_1 est un réel $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(z_1) = 0 \Leftrightarrow 2 - 3a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$
- b. z_2 est un imaginaire pur $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_2) = 0 \Leftrightarrow \frac{a+1}{2} = 0 \Leftrightarrow a = -1$
- c. $z_{34} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_3) = 0 \Leftrightarrow 4 - a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = -2$ ou $a = 2$
- 2) a. Pour que deux nombres complexes soient égaux, il faut que leurs parties réelles soient égales entre elles, ainsi que leurs parties imaginaires : $\begin{cases} \operatorname{Re}(z_5) = 4 \\ \operatorname{Im}(z_5) = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2a}{3} = 4 \\ -5 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{12}{2} = 6$
- b. $z_6 = \frac{3-4i}{2} = \frac{3}{2} - 2i \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z_6) = \frac{3}{2} \\ \operatorname{Im}(z_6) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 1 = \frac{3}{2} \\ -(4+b) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = \frac{5}{2} \\ -4 - b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{4} \\ b = -2 \end{cases}$
- c. $\begin{cases} x = 3 \\ 2 = 5 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$

Exercice 4 : Calcul niveau +

- 1) $f(3i) = 2 - i(3i) = 2 + 3 = 5$ $f(-1) = 2 - i(-1) = 2 + i$
 $f(1+i) = 2 - i(1+i) = 2 - i - i^2 = 3 - i$
 Et $f(z_1) = f(2+3i) = 2 - i(2+3i) = 2 - 2i - 3i^2 = 5 - 2i$
- 2) $Z = 2(2a - 3i) - i(1 - 2ai) = 4a - 6i - i + 2ai^2 = 4a - 2a - 7i = 2a - 7i$
 Donc $\operatorname{Re}(Z) = 2a$ et $\operatorname{Im}(Z) = -7$
- 3) a. $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$; $i^5 = i$; $i^{12} = (i^2)^6 = (-1)^6 = 1$; $i^{13} = i$; $i^{14} = -1$
 b. On doit distinguer selon que n soit un multiple de 4 ou pas : pour un entier naturel k , on a :
 $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$ et $i^{4k+3} = -i$
 c. On a $2713 = 4 \times 678 + 1$ donc, d'après la question précédente $i^{2713} = i$
- 4) a) $z = 3 \times (-i^2) - 2i = i(-3i - 2)$ b) $z = 4 \times (-i^2) + i = i(-4i + 1)$ c) $z = i(2i)$
- 5) L'affirmation est vraie...
 On a $(1+i)^4 = ((1+i)^2)^2 = (1+2i+i^2)^2 = (1+2i-1)^2 = (2i)^2 = 4i^2 = -4$
 Donc $(1+i)^{4n} = ((1+i)^4)^n = (-4)^n$
 Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a bien $(1+i)^{4n} = (-4)^n$

Exercice 5 : Et pourquoi pas des suites ?

- 1) $u_1 = (1+i)u_0 = 1+i$ et $u_2 = (1+i)u_1 = (1+i)(1+i) = 1+2i-1 = 2i$
- 2) a. On pourrait dire que la suite (u_n) est une suite « géométrique » de « raison » $1+i$
 b. Toujours en analogie avec les suites réelles : on aurait : $u_n = u_0 \times q^n = 1 \times (1+i)^n = (1+i)^n$
 c. $u_4 = (1+i)^4 = -4$ d'après l'exercice 5 (mais vous avez le droit de le recalculer ☺)
 donc $u_5 = (1+i)u_4 = -4(1+i) = -4 - 4i$