Chap 2

Matrices

(1ère partie)

Savoir M. 3 : Matrices inverses

Exercice 12 : Calculs directs

1) Montrer dans chaque cas que les matrices A et B sont inverses l'une de l'autre :

a) $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? si oui, donner leur inverse.

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & c \\ d & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer à quelles conditions les matrices A et B sont inversibles, et donner leurs inverses.

4) Déterminer la matrice inverse de $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

5) Dans chaque cas, calculer AB et en déduire A^{-1}

a) $A = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -6 & 2 & -2 \\ 6 & 2 & 10 \end{pmatrix}$

6) Déterminer à la calculatrice les matrices inverses des matrices suivantes (donner les fractions irréductibles)

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 13 : Vérifier qu'on a bien compris

1) Montrer dans chaque cas que les matrices A et B sont inverses l'une de l'autre :

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

2) Déterminer la matrice inverse de $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) Dans chaque cas, calculer AB et en déduire A^{-1} :

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 12 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -12 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 14 : Avec du calcul matriciel

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2, A^3 et A^4. En déduire A^{-1}

2) Soit A une matrice carré d'ordre 3 telle que $A^2 - 6A + 3I = 0$. Montrer que $A^{-1} = -\frac{1}{3}A + 2I$

3) A est la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = 2A + I_2$

b) Calculer alors $A(A - 2I_2)$

c) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}

Exercice 15 : Extraits Sujets de bac

Extrait 1

On définit $A = \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}525 \\ 0{,}625 & 0{,}625 \end{pmatrix}$. On introduit les matrices suivantes $Q = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -0{,}25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On admet que la matrice Q est inversible et que $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}06 \\ 0{,}1 & 0{,}14 \end{pmatrix}$

Montrer que $Q \times D \times Q^{-1} = A$.

Extrait 2

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$. On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a. Calculer $(I - M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

b. En déduire que la matrice $I - M$ est inversible et préciser son inverse.

c. Déterminer la matrice U telle que $U = M \times U + P$.

Extrait 3

On définit les matrices : $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$, $P' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

a. Calculer le produit PP'.

b. On admet que $P'BP = A$. Exprimer alors B en fonction de P, P' et A

Extrait 4

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}01 \\ 0{,}05 & 0{,}99 \end{pmatrix}$. Soient les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

a. Calculer PQ et QP. En déduire la matrice P^{-1} en fonction de Q.

b. Vérifier que la matrice $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.

Extrait 5

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$. On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et N la matrice $I - A$.
On désigne par C une matrice colonne à deux lignes.

a. Démontrer que $C = A \times C + B$ équivaut à $N \times C = B$.

b. On admet que N est une matrice inversible et que $N^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{45}{23} & \frac{20}{23} \\ \frac{10}{23} & \frac{30}{23} \end{pmatrix}$. En déduire que $C = \begin{pmatrix} \frac{17}{46} \\ \frac{7}{23} \end{pmatrix}$

Extrait 6

On donne les matrices : $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

a. Calculer la matrice $6A - A^2$.

b. En déduire que A est inversible et que sa matrice inverse, notée A^{-1}, peut s'écrire sous la forme $A^{-1} = \alpha I + \beta A$, ou α et β sont deux réels que l'on déterminera.

c. Vérifier que : $B = 5A^{-1}$

Extrait 7

On donne les matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a. Déterminer la matrice M^2 . On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$

b. Vérifier que $M^3 = M^2 + 8M + 6I$

c. En déduire que M est inversible et que $M^{-1} = \frac{1}{6}(M^2 - M - 8I)$.

Exercice 16 : Vérifier qu'on a bien compris

1) B est la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calculer B^2 et l'exprimer en fonction de B et de I_3

b) Calculer alors $B(B - I_3)$

c) En déduire que B est inversible et calculer B^{-1}

2) Vrai/faux

Question 1 : les matrices A, M et N sont des matrices carrées de même ordre. O est la matrice nulle.

a) Si A est inversible, alors $(AM = O) \Leftrightarrow (M = O)$

b) Si A est inversible, alors $(AM = AN) \Leftrightarrow (M = N)$

Q. 2 : La matrice nulle n'est pas inversible

Q. 3 : A et B sont des matrices carrées inversibles. Alors l'inverse de AB est le produit $B^{-1}A^{-1}$

Q. 4 : Une matrice diagonale de coef. a_{ii} est inversible et a pour inverse la matrice diagonale de coef. $\frac{1}{aii}$

3) Recherche de généralisation :

M est une matrice carrée telle que $M^2 = aM + bI$ où a et b sont des réels

a) Montrer que $M(M - aI) = (M - aI)M = bI$

b) Déduisez-en une condition sur b pour que M soit inversible.
Exprimer dans ce cas M^{-1} en fonction de M et de I