Entraînement Bac - Fonctions

Sujets des bacs ES et S des années avant réforme

Sujet n°1

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = e^x + \frac{1}{x}$$

1. Étude d'une fonction auxiliaire

a. Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = x^2e^x - 1$.
Étudier le sens de variation de la fonction g .

b. Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0\,;+\infty[$ tel que $g(a) = 0$.
Démontrer que a appartient à l'intervalle $[0{,}703;\ 0{,}704[$.

c. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\,;+\infty[$.

2. Étude de la fonction *f*

a. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
Démontrer que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

b. En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

c. Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel $m = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}$

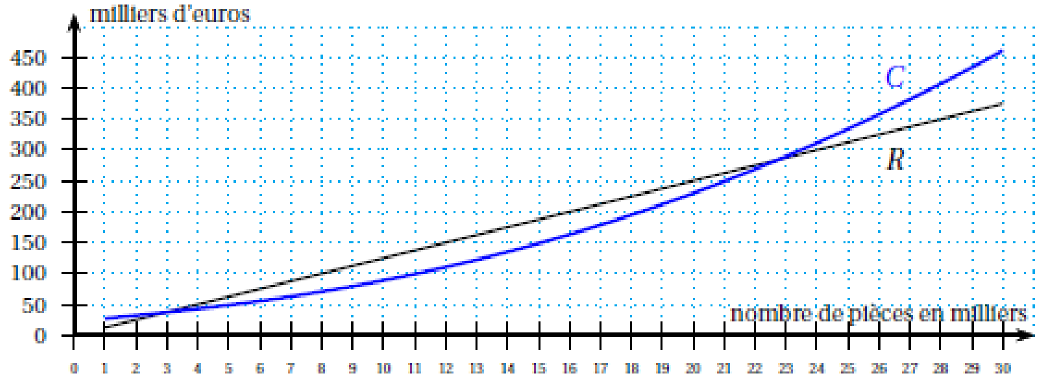
d. Justifier que $3{,}43 < m < 3{,}45$

Sujet n°2

Les parties A *et* B *peuvent être traitées de façon indépendante.*

Partie A

On donne ci-dessous R et C les représentations graphiques respectives des fonctions recette et coût sur l'intervalle [1 ; 30].



Par lecture graphique,
donner une estimation des valeurs demandées.

1. Quel est le coût de production de 21 000 pièces ?

2. Pour quelles quantités de pièces produites l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ?

3. Pour quel nombre de pièces produites le bénéfice est-il maximal ?

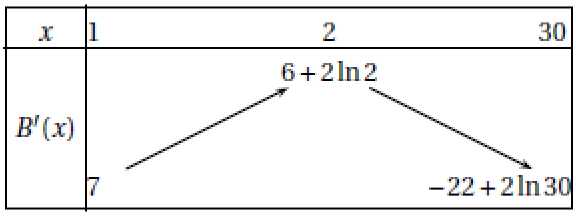
Partie B

Le bénéfice en milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x milliers de pièces, est donné sur l'intervalle [1 ; 30] par :

$$B(x) = -0{,}5x^2 + 6x - 20 + 2x\ln x$$

1. Montrer que $B'(x) = -x + 8 + 2\ln x$, où B' est la dérivée de B sur l'intervalle [1 ; 30].

2. On admet que $B''(x) = -1 + \frac{2}{x}$, où B'' est la dérivée seconde de B sur l'intervalle [1 ; 30].
Justifier le tableau de variation ci-dessous de la fonction dérivée B' sur l'intervalle [1 ; 30].



3. a. Montrer que l'équation $B'(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle [1 ; 30].

b. Donner une valeur approchée au millième de la valeur de α.

4. En déduire le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle [1 ; 30], et donner le tableau de variation de la fonction bénéfice B sur ce même intervalle.

5. Quel est le nombre de pièces à produire, à l'unité près, pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximal ? Quel est ce bénéfice maximal (arrondi au millier d'euros) ?

Sujet n°3

La pharmacocinétique étudie l'évolution d'un médicament après son administration dans l'organisme, en mesurant sa concentration plasmatique, c'est-dire sa concentration dans le plasma.
On étudie dans cet exercice l'évolution de la concentration plasmatique chez un patient d'une même dose de médicament, en envisageant différents modes d'administration.

Partie A : administration par voie intraveineuse

On note $f(t)$ la concentration plasmatique, exprimée en microgramme par litre (μg.L^{-1}), du médicament, au bout de t heures après administration par voie intraveineuse.
Le modèle mathématique est : $f\ (t\ ) = \frac{20}{t+1}$, avec $t \in [0\ ;\ +\infty[$.
La concentration plasmatique initiale du médicament est donc $f(0) = 20\ \mu$g.L^{-1}.

1. La demi-vie du médicament est la durée (en heure) après laquelle la concentration plasmatique du médicament est égale à la moitié de la concentration initiale.
Déterminer cette demi-vie, notée $t_{0,5}$.

2. On estime que le médicament est éliminé dès que la concentration plasmatique est inférieure à 0,6 μg.L^{-1}.
Montrer qu'il y aura une durée au bout de laquelle le médicament sera éliminé. On donnera une estimation de cette durée à la minute près.

Partie B : administration répétée par voie intraveineuse

On décide d'injecter à intervalles de temps réguliers la même dose de médicament par voie intraveineuse.
L'intervalle de temps (en heure) entre deux injections est choisi égal à la demi-vie du médicament, c'est-à-dire au nombre $t_{0,5}$ qui a été calculé en **A - 1.**
Chaque nouvelle injection entraîne une hausse de la concentration plasmatique de 20 μg.L^{-1}.
On note u_n la concentration plasmatique du médicament immédiatement après la n-ième injection.
Ainsi, $u_1 = 20$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 20$.

On remarque qu'avec ce modèle, la concentration initiale du médicament après la première injection, soit 20 μg.L^{-1}, est analogue à celle donnée par le modèle de la **partie A**, soit $f(0)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$: $u_n = 40 - 40 \times 0{,}5^n$.

2. On considère que l'équilibre est atteint dès que la concentration plasmatique dépasse 38 μg.L^{-1}.
Déterminer le nombre minimal d'injections nécessaires pour atteindre cet équilibre.

Sujet n°4

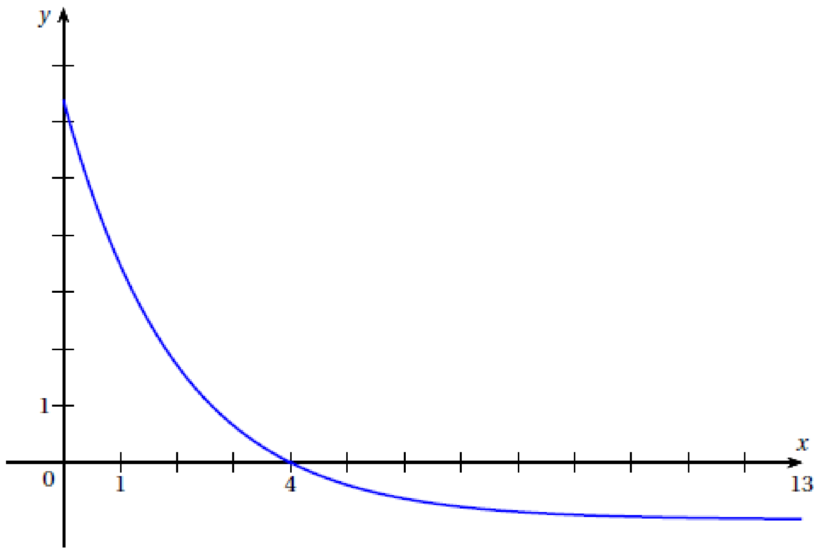
Pour chacune des situations suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 1]$.

x	-3		-1		0		1
Variations de f	-6	↗	-1	↘	-2	↗	4

Proposition 1 : L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-3\ ;\ 1]$.

2. On considère une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ 13]$ et on donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction g', fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;\ 13]$.



Proposition 2 : La fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 4]$.

Proposition 3 : La fonction g est concave sur l'intervalle $[0\ ;\ 13]$.

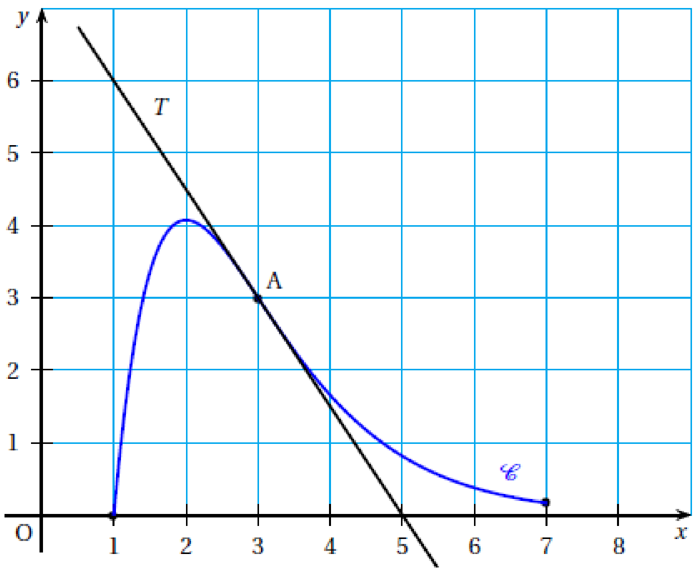
(…)

Sujet n°5

Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte.
Aucune justification n'est demandée.

La courbe C ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthonormé, d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[1\ ;\ 7]$.

La droite T est tangente à la courbe C au point A(3 ; 3) et passe par le point de coordonnées (5 ; 0).
Le point A est l'unique point d'inflexion de la courbe C
.



1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f :

a. $f'(3) = 3$ **b.** $f'(3) = \dfrac{3}{2}$

c. $f'(3) = -\dfrac{2}{3}$ **d.** $f'(3) = -\dfrac{3}{2}$

2. On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f :

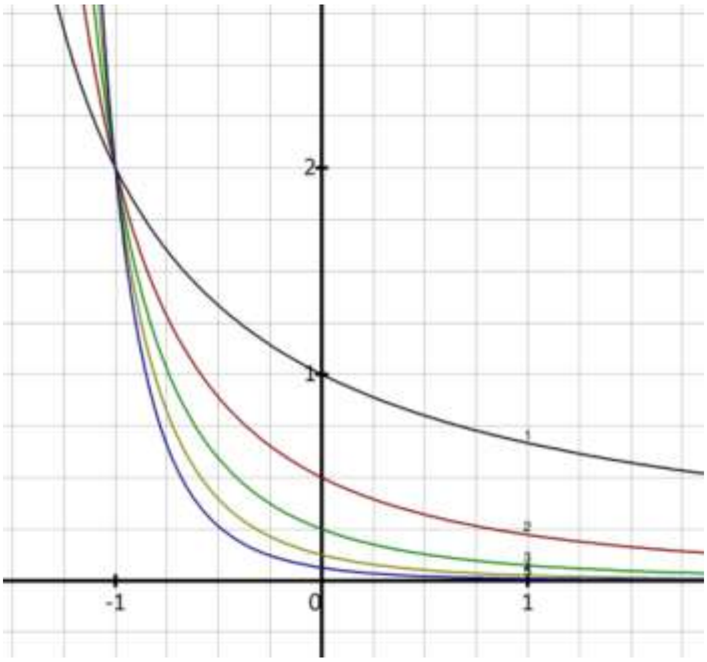
a. $f''(3) = 3$ **b.** $f''(3) = 0$ **c.** $f''(5) = 0$ **d.** $f''(2) = 0$

Sujet n°6

On définit, pour tout réel $x > -2$ et pour tout entier $p \geq 1$, la fonction f_p par :

$$f_p = \frac{2}{(x+2)^p}$$

$\mathcal{C}_p$ est la courbe représentative de la fonction f_p.
On donne ci-contre les représentations pour $p \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$



1) Montrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_p$ passent par un point commun que l'on précisera.

2) Montrer que les fonctions f_p sont strictement décroissantes sur $]-2;+\infty[$ pour tout entier $p \geq 1$.

3) a. Montrer que, pour tout réel $x > -2$ et pour tout entier $p \geq 1$, l'équation $f_p(x) = \frac{1}{2}$ est équivalente à l'équation $(x+2)^p - 4 = 0$

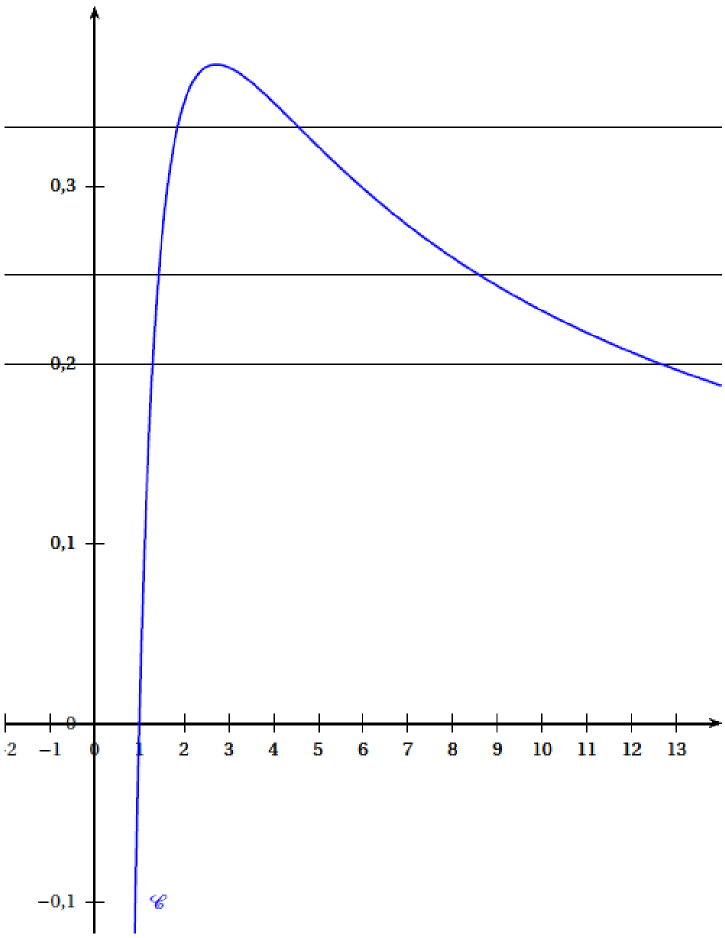
b. En déduire que l'équation $(x+2)^3 - 4 = 0$ admet une unique solution sur $]-2;+\infty[$ et en donner une valeur approchée à 0,1 près.

Sujet n°7

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel strictement positif.
Le but de l'exercice est d'étudier l'équation

$$(E_n) \quad : \quad \frac{ln(x)}{x} = \frac{1}{n}$$

ayant pour inconnue le nombre réel strictement positif x.



Partie A : Soit f la fonction définie sur l'intervalle]0 ; +∞[par $f(x) = \dfrac{ln(x)}{x}$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle]0 ; +∞[.
On a donné ci-contre la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Étudier les variations de la fonction f .

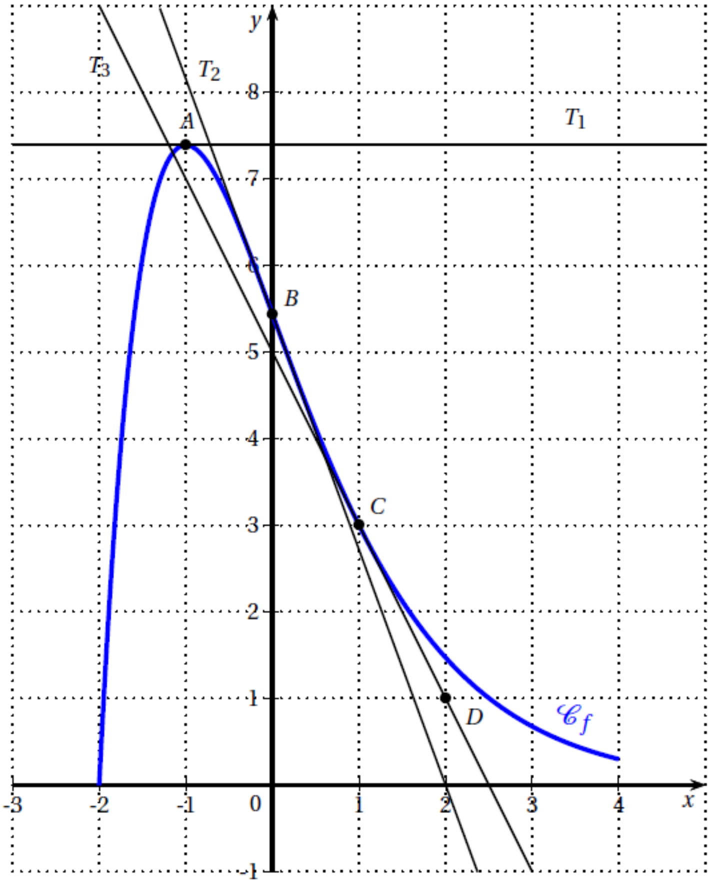
2. Déterminer son maximum.

Partie B

1. Montrer que, pour $n \geq 3$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ possède une unique solution sur [1 ; e] notée α_n.

Sujet n°8

Partie A



Dans le repère ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [−2 ; 4] ainsi que plusieurs tangentes à $\mathcal{C}_f$:

- T_1 est la tangente au point A de coordonnées $(-1\ ;\ e^2)$,
- T_2 est la tangente au point B de coordonnées $(0\ ;\ 2e)$,
- T_3 est la tangente au point C de coordonnées (1 ; 3).

On sait que la tangente T_1 est parallèle à l'axe des abscisses et que la tangente T_3 passe par le point D de coordonnées (2 ; 1).

1. Déterminer $f'(-1)$ et $f'(1)$.
2. On admet que B est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$. Quelle interprétation graphique peut-on faire ?
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point C .

Partie B

On admet que la fonction f de la partie A est définie, pour tout réel x de l'intervalle [−2; 4], par :

$$f(x) = (x+2)e^{-x+1}$$

On note f' la fonction dérivée de f .

1. Montrer que, pour tout x de l'intervalle [−2 ; 4], on a $f'(x) = -(x+1)e^{-x+1}$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [−2 ; 4] puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.

Partie C

Déterminer un intervalle sur lequel la fonction f est convexe. justifier.