Extrait 1 - Pondichéry 2017

On considère deux suites (u_n) et (v_n) :

• la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$

• la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 2^n$

Partie A : Conjectures

Florent a calculé les premiers termes de ces deux suites à l'aide d'un tableur. Une copie d'écran est donnée ci-contre.

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	0	1	1
3	1	5	2
4	2	12	4
5	3	25	8
6	4	50	16

1. Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des deux suites ?

(…)

Partie B : Étude de la suite (u_n)

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$

(…)

3. Déterminer le rang du premier terme de la suite supérieur à 1 million.

Extrait 2 - N^elle Calédonie nov. 2016

Un apiculteur étudie l'évolution de sa population d'abeilles. Au début de son étude, il évalue à 10 000 le nombre de ses abeilles.
Chaque année, l'apiculteur observe qu'il perd 20% des abeilles de l'année précédente. Il achète un nombre identique de nouvelles abeilles chaque année. On notera c ce nombre exprimé en dizaines de milliers.

On note u_0 le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, de cet apiculteur au début de l'étude.
Pour tout entier naturel n non nul, u_n désigne le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, au bout de la n-ième année. Ainsi, on a $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}8u_n + c$.

Partie A

On suppose dans cette partie seulement que $c = 1$. **(…)**

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 5 - 4 \times 0{,}8^n$.

(…)

Partie B

L'apiculteur souhaite que le nombre d'abeilles tende vers 100 000.
On cherche à déterminer la valeur de c qui permet d'atteindre cet objectif.
On définit la suite (v_n) par, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 5c$.

1. Montrer que la suite (v_n)est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

2. En déduire une expression du terme général de la suite (v_n) en fonction de n. **(…)**

Extrait 3 - Pondichéry 2015

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n, par la relation $u_{n+1} = au_n + b$ (a et b réels non nuls tels que $a \neq 1$).

On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$

1. Démontrer que, la suite (v_n) est géométrique de raison a.

(…)

Partie B

En mars 2015, Max achète une plante verte mesurant 80 cm. On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mars, en coupant un quart de sa hauteur. La plante poussera alors de 30 cm au cours des douze mois suivants. Dès qu'il rentre chez lui, Max taille sa plante.

1. Quelle sera la hauteur de la plante en mars 2016 avant que Max ne la taille ?

2. Pour tout entier naturel n, on note h_n la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars de l'année (2015+n).

a. Justifier que, pour tout entier naturel n, $h_{n+1} = 0{,}75h_n + 30$.

(…)

Extrait 4 - Antilles-Guyane juin 2014

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0{,}5^n$.

1. a. Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2								

b. D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n)

(…)

3. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 10 \times 0{,}5^n$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$. On précisera le premier terme de la suite (v_n)

b. En déduire, que pour tout entier naturel n,

$$u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0{,}5^n .$$

(…)

4. Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n \leq 0{,}01$.

Entrée :	n et u sont des nombres	
Initialisation :	$n \longleftarrow 0$ $u \longleftarrow 2$	
Traitement :	Tant que …….	(1)
	$n \longleftarrow \cdots$	(2)
	$u \longleftarrow \cdots$	(3)
	Fin Tant que	
Sortie :	Afficher n	

Extrait 5 - Asie juin 2017

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n+4}\right) u_n \end{cases}$ pour tout entier naturel n,

On définit la suite (v_n) par :
pour tout entier naturel n, $v_n = (n+1)u_n$.

	A	B	C
1	n	u_n	v_n
2	0	1,000 00	1,000 00
3	1	0,25000	0,500 00
4	2	0,083 33	0,250 00
5	3	0,031 25	0,125 00
6	4	0,012 50	0,062 50
7	5	0,005 21	0,031 25
8	6	0,002 23	0,015 63
9	7	0,000 98	0,007 81
10	8	0,000 43	0,003 91
11	9	0,000 20	0,001 95

1. La feuille de calcul ci-contre présente les valeurs des premiers termes des suites (u_n) et (v_n), arrondies au cent-millième. Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) ?

2. a. Conjecturer l'expression de v_n en fonction de n.

b. Démontrer cette conjecture.

(...)

Sujet entier - Polynésie juin 2016 - 3 points

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n$.

On considère également la suite v définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5$.

1. Voici un extrait de feuille de tableur :

	A	B	C
1	n	u	v
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	
7			
8			
9			
10			

Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules C2 et B3 et copiées vers le bas pour afficher les termes des suites u et v ?

2. Déterminer, en justifiant, une expression de v_n et de u_n en fonction de n uniquement.

Corrigé Extrait 1

Partie A

1. « B3 = 2*B2 – A2 + 3 » et **« C3 = C2*2 »** ou **« C3 = 2^A3 »**

(Attention, en vrai, sur un tableur, pour faire apparaître le « ^ », il faut mettre un espace après puis cliquer sur la case)

Partie B

1. Raisonnement par récurrence

<u>*Init.*</u> : Pour $n = 0$, on a $u_n = 1$ et $3 \times 2^n + n - 2 = 3 \times 1 - 2 = 1$ $\Rightarrow$ L'égalité est vraie au rang 0

<u>Hérédité</u> : **Si la propriété est vraie pour $\boldsymbol{n = p}$** alors on a : $u_p = 3 \times 2^p + p - 2$

Alors pour $\boldsymbol{n = p + 1}$, on a : $u_n = u_{p+1} = 2u_p - p + 3 = 2(3 \times 2^p + p - 2) - p + 3$

$= 3 \times 2^{p+1} + 2p - 4 - p + 3 = 3 \times 2^{p+1} + p - 1$

Et d'autre part : $3 \times 2^n + n - 2 = 3 \times 2^{p+1} + (p + 1) - 2 = 3 \times 2^{p+1} + p - 1$

Alors la propriété est vraie au rang $\boldsymbol{n = p + 1}$

<u>Conclusion</u> : Donc **pour tout nombre entier $\boldsymbol{n}$, on a :**

$$\boldsymbol{u_n = 3 \times 2^n + n - 2}$$

3. À la calculatrice, on trouve $u_{18} = 786\,448$ et $u_{19} = 1\,572\,881$, **c'est donc à partir du terme $\boldsymbol{u_{19}}$ que la suite dépasse un million.**

Corrigé Extrait 2

Partie A

$u_{n+1} = 0{,}8u_n + 1$

2. Raisonnement par récurrence

<u>*Init.*</u> : Pour $n = 0$, on a $u_n = 1$ et $5 - 4 \times 0{,}8^n = 5 - 4 = 1 = u_0$ L'égalité est vraie au rang 0

<u>Hérédité</u> : **Si la propriété est vraie pour $\boldsymbol{n = p}$** alors on a : $u_p = 5 - 4 \times 0{,}8^p$

Alors pour $\boldsymbol{n = p + 1}$, on a : $u_{p+1} = 0{,}8u_p + 1 = 0{,}8(5 - 4 \times 0{,}8^p) + 1 = 4 - 4 \times 0{,}8^{p+1} + 1$

$= \boldsymbol{5 - 4 \times 0{,}8^{p+1}}$

Et $5 - 4 \times 0{,}8^n = \boldsymbol{5 - 4 \times 0{,}8^{p+1}}$ **Alors la propriété est vraie au rang $\boldsymbol{n = p + 1}$**

<u>Conclusion</u> : Donc **pour tout nombre entier $\boldsymbol{n}$, on a bien :**

$$\boldsymbol{u_n = 5 - 4 \times 0{,}8^n}$$

Partie B

1. On a $v_{n+1} = u_{n+1} - 5c = 0{,}8u_n + c - 5c$ Or $u_n = v_n + 5c$ donc $v_{n+1} = 0{,}8(v_n + 5c) - 4c$

$v_{n+1} = 0{,}8v_n + 4c - 4c = 0{,}8v_n$

La suite $\boldsymbol{(v_n)}$ est une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme $\boldsymbol{v_0}$ $= u_0 - 5c = \boldsymbol{1 - 5c}$

2. $\boldsymbol{v_n} = v_0 \times q^n = \boldsymbol{(1 - 5c) \times 0{,}8^n}$

Corrigé Extrait 3

Partie A

1. $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{b}{1-a} = au_n + b - \frac{b}{1-a} = au_n + \frac{b(1-a)-b}{1-a} = au_n - \frac{ab}{1-a}$ Or $u_n = v_n + \frac{b}{1-a}$
Donc $v_{n+1} = a\left(v_n + \frac{b}{1-a}\right) - \frac{ab}{1-a} = av_n + \frac{ab}{1-a} - \frac{ab}{1-a} = \boldsymbol{av_n}$

La suite $(\boldsymbol{v_n})$ est bien géométrique de raison $\boldsymbol{a}$.

Partie B

1. Enlever un quart revient à en garder $\frac{3}{4}$, donc $80 \times \frac{3}{4} + 30 = 90$
En mars 2016, la plante aura 90 cm

2. Pour tout entier naturel n, on note h_n la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars de l'année (2015+n).

a. En enlevant $\frac{1}{4}$ de la plante d'une année sur l'autre, **on en conserve les $\frac{3}{4}$**, donc $\frac{3}{4}h_n = 0{,}75h_n$.
Mais la plante doit prendre 30 cm, elle mesurera donc, l'année $n+1$, $h_{n+1} = 0{,}75h_n + 30$

Corrigé Extrait 4

1. a.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2	3,4	2,18	1,19	0,61	0,31	0,16	0,08	0,04

b. La suite (u_n) a l'air d'être décroissante

3. a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 10 \times 0{,}5^{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0{,}5^n - 10 \times 0{,}5 \times 0{,}5^n$ Or $u_n = v_n + 10 \times 0{,}5^n$
Donc $v_{n+1} = \frac{1}{5}(v_n + 10 \times 0{,}5^n) + 3 \times 0{,}5^n - 5 \times 0{,}5^n = \frac{1}{5}v_n + 2 \times 0{,}5^n - 2 \times 0{,}5^n = \frac{1}{5}v_n$
La suite (v_n) est bien une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme :
$v_0 = u_0 - 10 \times 0{,}5^0 = 2 - 10 = \boldsymbol{-8}$

b. On a : $\boldsymbol{v_n} = v_0 \times q^n = \boldsymbol{-8} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{\boldsymbol{n}}$ Et donc : $\boldsymbol{u_n} = v_n + 10 \times 0,5^n = \boldsymbol{-8} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{10 \times 0,5^n}$

4. Traitement : Tant que $\boldsymbol{u} > 0{,}01$
$n \leftarrow \boldsymbol{n+1}$
$u \leftarrow \boldsymbol{\frac{1}{5}u + 3 \times 0,5^{n-1}}$

(Attention, vu que n passe à $n+1$ avant le calcul du terme suivant, il faut bien mettre le 0,5 à la puissance $n-1$… il aurait mieux valu calculer u d'abord, et changer n ensuite… mais bon… on va pas refaire le sujet)

Corrigé Extrait 5

1. « $\boldsymbol{B3 = A3/(2 * A2 + 4) * B2}$ »

2. a. Il semblerait que $\boldsymbol{v_n = \frac{1}{2^n}}$

b. Pistes pour y arriver
Selon la conjecture, (v_n) semble être une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 1. C'est donc ce qu'il va falloir démontrer, un peu comme d'habitude, en jouant avec la relation entre u_n et v_n et la relation de récurrence sur u_n

$v_{n+1} = \big((n+1)+1\big)u_{n+1} = (n+2) \times \left(\frac{n+1}{2n+4}\right)u_n$ Or $v_n = (n+1)u_n \Leftrightarrow u_n = \frac{v_n}{n+1}$ car $n \neq -1$
Donc $v_{n+1} = \frac{(n+2)(n+1)}{2(n+2)} \times \frac{v_n}{n+1} = \boldsymbol{\frac{1}{2}v_n}$ Et on a $v_0 = (0+1)u_0 = 1$
Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 1$
On a alors $\boldsymbol{v_n} = v_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \boldsymbol{\frac{1}{2^n}}$ **comme on l'avait conjecturé**

Corrigé Sujet entier

1. "$B3 = 2 * B2 + 2 * A2 * A2 - A2$" et "$C2 = B2 + 2 * A2 * A2 + 3 * A2 + 5$"

2. Piste pour partir : Au vu des résultats, il semblerait que la suite v_n soit une suite géométrique (quelle surprise !) de raison 2 et de premier terme 7… même méthode que d'habitude pour le démontrer… C'est un peu calculatoire, ne lâchez pas…

$v_{n+1} = u_{n+1} + 2(n+1)^2 + 3(n+1) + 5 = (2u_n + 2n^2 - n) + 2n^2 + 4n + 2 + 3n + 3 + 5$
$v_{n+1} = 2u_n + 4n^2 + 6n + +10$ or on a $u_n = v_n - 2n^2 - 3n - 5$, donc
$v_{n+1} = 2(v_n - 2n^2 - 3n - 5) + 4n^2 + 6n + +10 = 2v_n$ et on a $v_0 = u_0 + 2 \times 0^2 + 3 \times 0 + 5 = 7$
La suite (v_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme 7.
On a donc $\boldsymbol{v_n} = v_0 \times q^n = \boldsymbol{7 \times 2^n}$
Et comme $u_n = v_n - 2n^2 - 3n - 5$, on a $\boldsymbol{u_n = 7 \times 2^n - 2n^2 - 3n - 5}$,

Franchement, c'est 3 points pas si durs à gagner, non ?