Fle.3 - Lien fondamental entre l'exponentielle et le logarithme

Propriétés : **(1)** pour $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$, on a : $\boldsymbol{e^a = b \Leftrightarrow a = \ln(b)}$

(2) pour $x \in \mathbb{R}$ on a $\boldsymbol{\ln(e^x) = x}$ et pour $x > 0$, on a : $\boldsymbol{e^{\ln x} = x}$

Démonstrations des propriétés du logarithme népérien

(1) D'un côté : $e^{\ln(xy)} = xy$ et de l'autre $e^{\ln x + \ln y} = e^{\ln x} \times e^{\ln y} = x \times y$
On en déduit que $e^{\ln(xy)} = e^{\ln x + \ln y}$ et donc que $\boldsymbol{\ln(xy) = \ln x + \ln y}$

(2) D'un côté : $e^{\ln\left(\frac{x}{y}\right)} = \frac{x}{y}$ et de l'autre $e^{\ln x - \ln y} = \frac{e^{\ln x}}{e^{\ln y}} = \frac{x}{y}$
On en déduit que $e^{\ln\left(\frac{x}{y}\right)} = e^{\ln x - \ln y}$ et donc que $\boldsymbol{\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y}$

(3) Propriété précédente pour $x = 1$: $\boldsymbol{\ln\left(\frac{1}{y}\right)} = \ln 1 - \ln y = \boldsymbol{-\ln y}$ (car $\ln 1 = 0$)

(4) D'un côté : $e^{\ln(x^n)} = x^n$ et de l'autre $e^{n \ln x} = \left(e^{\ln x}\right)^n = x^n$
On en déduit que $e^{\ln(x^n)} = e^{n \ln x}$ et donc que $\boldsymbol{\ln(x^n) = n \ln x}$ Ou par récurrence ☺

Comparatif des propriétés de l'exponentielle et du logarithme

Exponentielle	**Logarithme népérien**
$e^{\ln x} = x$	$\ln(e^x) = x$
$e^0 = 1$ et $e^1 = e$	$\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$
$\forall A,\ e^A > 0$	$\ln B$ définie pour $B > 0$
$e^{x+y} = e^x e^y$	$\ln(xy) = \ln x + \ln y$
$e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$	$\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
$e^{-y} = \dfrac{1}{e^y}$	$\ln\left(\dfrac{1}{y}\right) = -\ln y$
$(e^x)^n = e^{nx}$	$\ln(x^n) = n \ln x$