

Corrigés Savoirs Fc. 3

Corrigé Exercice 7

1) a) f est continue et strictement décroissante sur $[2 ; 13]$ avec $f(2) > 0$ et $f(13) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ possède donc une seule solution a sur $[2 ; 13]$.

x	2	a	13
$f(x)$	8	$\searrow$	-2
Signe de f	+	0	-

b) On a alors :

2) Sur $[4; 6]$ la fonction g' est strictement négative.

Pas de solution sur cet intervalle.

g' est continue et strictement décroissante sur $[-2; 4]$ avec $0 \in [g'(4); g'(-2)]$. D'après le TVI, l'équation $g'(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [-2; 4]$. On a :

x	-2	α	6
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$1 - 6e$	$\nearrow g(\alpha) \searrow$	$1 + 18e^{-3}$

3) a) $f'(x) = \frac{1}{2} \times 2x - \frac{2x}{x^2+1} = x - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^3+x-2x}{x^2+1}$
 $f'(x) = \frac{x(x^2-1)}{x^2+1}$

b) La fonction f est continue sur $[0; 5]$.

Elle est strictement croissante sur $[1; 5]$ avec $f(1) < 0$ et $f(5) > 0$.

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[1; 5]$.

Par ailleurs, on a $f(0) = 0$ donc 0 est la deuxième solution de l'équation sur $[0; 5]$.

x	0	1	5
x	0	+	+
$x^2 - 1$		-	0
$x^2 + 1$		+	+
$f'(x)$	0	-	0
$f(x)$	0	$\searrow \frac{1}{2} - \ln 2$	$\nearrow \frac{25}{2} - \ln 26$

c)

x	0	α	5
$f(x)$	0	-	0

À la calculatrice, on trouve $1,58 < \alpha < 1,59$

Un peu plus...

2) a) $g'(x) = 12x - 6x^2 = -6x(x - 2)$
 et $g(-1) = 6 ; g(0) = -2$ et $g(2) = 6$

g est continue sur $\mathbb{R}$

Sur $[-1 ; 0]$, elle est strictement décroissante, avec $g(-1) > 0$ et $g(0) < 0$. Donc d'après le TVI, l'équation $g(x) = 0$ y admet une unique solution, **notée α** .

De même, **sur $[0 ; 2]$** , g est strictement croissante, avec $g(0) < 0$ et $g(2) > 0$, l'équation $g(x) = 0$ y admet une unique solution, **notée β** .

x	-1	α	0	β	2
$g'(x)$	-	0	+	0	+
$g(x)$	6	$\searrow$	-2	$\nearrow$	6
Signe de g	+	0	-	0	+

Corrigé Exercice 8

1) a. $f'(x) = 6x^2 - 12x = 6x(x - 2)$

Il s'agit d'un PSD de racines $x_1 = 0$ et $x_2 = 2$ et négatif à l'intérieur des racines, soit sur $[0; 2]$.

Donc $f'(x) \leq 0$ et **f est bien strictement décroissante sur $[0; 2]$.**

b. $(E_1) : 2x^3 + 5 = 6x^2 \Leftrightarrow 2x^3 - 6x^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

Or, f est continue et strictement décroissante sur $[0; 2]$, et on a $f(0) = 5$ et $f(2) = -3$ donc $0 \in [f(2); f(0)]$. D'après le TVi, l'équation $f(x) = 0$ admet une **unique solution x_0 sur $[0; 2]$**

c. à la calculatrice, par balayage, on trouve **$x_0 \simeq 1,168$**

Un peu plus...

2) On cherche à résoudre l'équation $(E_2): x^4 + 10 = 8x^2$ pour $x \in [0; 5]$.

a. $(E_2): x^4 + 10 = 8x^2 \Leftrightarrow x^4 - 8x^2 + 10 = 0$

On définit sur $[0; 15]$ la fonction $g(x) = x^4 - 8x^2 + 10$.

On a $g'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4)$

g est continue sur $[0; 5]$. Elle est strictement décroissante sur $[0; 2]$ avec $0 \in [g(2); g(0)]$: d'après le Tvi, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; 2]$.

De même, g est strictement croissante sur $[2; 5]$ avec $0 \in [g(2); g(5)]$: l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution β sur $[2; 5]$.

(E_2) admet bien seulement deux solutions α et β sur $[0; 5]$

b. On trouve **$\alpha \simeq 1,25$ et $\beta \simeq 2,54$**

Donc

x	0	2	5
$4x$	0	+	+
$x^2 - 4$		-	+
$g'(x)$	0	-	+
$g(x)$	10	$\searrow$ -6	$\nearrow$ 435

Corrigé Exercice 9

Corrigé Partie A - 1.

$$f'(x) = \frac{-3(-2e^{-2x})}{(1+e^{-2x})^2} = \frac{6e^{-2x}}{(1+e^{-2x})^2}$$

L'exponentielle est toujours strictement positive, ainsi que le dénominateur (carré d'un nombre déjà strictement positif).

Donc la dérivée f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et la **fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$**

3. On calcule avec la calculatrice : $f(0) = 1,5 < 2,999$ et $f(5) \simeq 2,99986 > 2,999$

Attention, selon les calculatrices, l'affichage dans les tableaux n'a que 3 décimales !!!
Utiliser le curseur pour faire apparaître une valeur approchée plus précise

D'après la question 1, la fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2,999$ **admet une unique solution α** , et on sait déjà qu'elle appartient à l'intervalle $[0; 5]$

À l'aide de la calculatrice, on détermine l'encadrement : **$4 \leq \alpha \leq 4,01$**

Corrigé Partie B

1. On a $h(x) = 3 - f(x) = 3 - \frac{3}{1+e^{-2x}} = 3 \left(1 - \frac{1}{1+e^{-2x}} \right) = 3 \left(\frac{1+e^{-2x}-1}{1+e^{-2x}} \right) = \frac{3e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

Une exponentielle est toujours strictement positive, donc $3e^{-2x} > 0$ et $1+e^{-2x} > 1 > 0$

La fonction h est bien strictement positive sur $\mathbb{R}$.

On a donc $h(x) > 0 \Leftrightarrow 3 - f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) < 3$ pour tout x

Comme la droite Δ a pour équation $y = 3$, on peut en déduire que **la courbe $\mathcal{C}$ sera toujours en dessous de la droite Δ**

Corrigé Exercice 10

Partie A - 2. a. $f'(x) = 1e^{1-x^2} + x(-2xe^{1-x^2}) = (1-2x^2)e^{1-x^2}$ CQFD

b. $1 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Et $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2}}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
$1 - 2x^2$	-	0	+	0	-
e^{1-x^2}	+		+		+
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2}}$	$\searrow$

Partie B

1. D'après le graphique, il semble que $g(x) \geq f(x)$ pour tout x , donc que **la courbe de g est partout au dessus de celle de f**

2. Pour $x \leq 0$, on a $xe^{1-x^2} \leq 0$ donc $f(x) \leq 0$ alors que, l'exponentielle étant toujours strictement positive, on a : **$g(x) = e^{1-x} > 0$.**

Un nombre négatif étant toujours strictement inférieur à un nombre positif, on a bien pour tout réel x appartenant à $] -\infty; 0]$, **$f(x) < g(x)$.**

Corrigé Exercice 11

Corrigé Partie A

1. Attention : il s'agit du maximum de C' pas de C , donc la question revient à savoir à quel moment la croissance des courbes est la plus rapide. **C'est visiblement le cas pour $t = 0$** , car la tangente aux courbes semble y avoir le coefficient directeur le plus grand.

2. Le coefficient directeur de la tangente en 0 est plus grand pour la courbe C_1 que pour la courbe C_2 . Donc la **personne la moins corpulente est la personne P_1**

3. a. $f'(t) = Ae^{-t} + At(-e^{-t}) = A(1-t)e^{-t}$ Donc $f'(0) = Ae^0 = A$

b. L'affirmation est fausse. D'après la question précédente, la vitesse d'absorption à l'ingestion ($f'(0)$) est d'autant plus grande que A est grand. Or la vitesse est plus grande pour une personne de plus faible corpulence. C'est donc l'inverse, « À quantité d'alcool absorbée égale, plus A est grand, moins la personne est corpulente. »

Corrigé Partie B

1. On peut utiliser les résultats de la 1^{ère} partie pour $A = 2$. On a alors $f'(t) = 2(1-t)e^{-t}$

2. Avec $f(1) = 2e - 1 = \frac{2}{e}$

t	0	1	$+\infty$
$1-t$	+	0	-
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	0 ↗	$\frac{2}{e}$	↘

La concentration d'alcool dans le sang de Paul est maximale **au bout d'une heure**. Elle est d'environ **0,74 g.L⁻¹**

4. a. f est continue et strictement croissante sur $[0; 1]$ avec $f(0) < 0,2$ et $f(1) > 0,2$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 0,2$ admet donc une unique **solution t_1 sur $[0; 1]$** .

De même, f est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$ et on a par exemple $f(4) < 0,2$. Donc l'équation $f(t) = 0,2$ admet donc une unique **solution t_2 sur $[1; +\infty[$**

b. à la calculatrice, on trouve $t_2 \simeq 3,6$.

Donc Paul doit attendre au moins 3 heures et 36 minutes pour reprendre le volant.