

Savoir SL. 6 : Cas d'indertémination

Déterminer les limites des suites suivantes, en justifiant.

Entraînement 1

$$c_n = -4n + 2n^3 + 5$$

$$d_n = 3^n - 5^n$$

$$s_n = \frac{n^2 - 3}{2 - 5n^3}$$

Entraînement 2

$$u_n = n^2 + 5 - 8n$$

$$v_n = \frac{3n^2 + 6n - 9}{3n + 4}$$

$$w_n = n^2 e^n - 4e^n$$

Entraînement 3

$$x_n = 2\sqrt{n} - 7n$$

$$y_n = \frac{3^n - 1}{3^{2n} - 2}$$

$$z_n = \frac{3n \ln(n) - 2 \ln(n)}{-5 \ln(n)}$$

Entraînement 4

$$c_n = -5n^3 + n^2 + 4$$

$$d_n = \frac{3n - 5}{7 - 2n}$$

$$s_n = 3^n - 6^n$$

Entraînement 5

$$c_n = n^3 - 5n^2 + 1$$

$$d_n = \frac{e^n}{1 - 2e^n}$$

$$s_n = \frac{1 - 3n}{n^2 + 2n - 3}$$

Entraînement 6

$$c_n = 3n^2 - 2n^4 + n$$

$$d_n = 3\sqrt{n} - n$$

$$s_n = \frac{3^n - 5}{1 - 4 \times 3^n}$$

Corrigé Savoir SL. 6

Corrigé Entraînement 1

• $c_n = -4n + 2n^3 + 5 = n^3 \left(-\frac{4}{n^2} + 2 + \frac{5}{n^3} \right)$ Or on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{4}{n^2} + 2 + \frac{5}{n^3} \right) = 2$

On a donc, par produit de limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = +\infty$

• $d_n = 3^n - 5^n = 5^n \left(\left(\frac{3}{5} \right)^n - 1 \right) = 5^n \left(\left(\frac{3}{5} \right)^n - 1 \right)$

Or on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty$ et, comme $\frac{3}{5} \in]-1; 1[$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{5} \right)^n - 1 = -1$

On a donc, par produit de limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = -\infty$

• $s_n = \frac{n^2-3}{2-5n^3} = \frac{n^2 \left(1 - \frac{3}{n^2} \right)}{n^3 \left(\frac{2}{n^3} - 5 \right)} = \frac{1 - \frac{3}{n^2}}{n \left(\frac{2}{n^3} - 5 \right)}$ Or on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{3}{n^2} = 1$

et, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{n^3} - 5 \right) = -5$, on a, par produit de limites : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{2}{n^3} - 5 \right) = -\infty$

On a donc, par quotient de limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 0$

Corrigé Entraînement 2

• $u_n = n^2 + 5 - 8n = n^2 \left(1 + \frac{5}{n^2} - \frac{8}{n} \right)$ Or on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{5}{n^2} - \frac{8}{n} \right) = 1$

On a donc, par produit de limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

• $v_n = \frac{3n^2+6n-9}{3n+4} = \frac{n^2 \left(3 + \frac{6}{n} - \frac{9}{n^2} \right)}{n \left(3 + \frac{4}{n} \right)} = \frac{n \left(3 + \frac{6}{n} - \frac{9}{n^2} \right)}{3 + \frac{4}{n}}$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{6}{n} - \frac{9}{n^2} \right) = 3$, donc, par produit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(3 + \frac{6}{n} - \frac{9}{n^2} \right) = +\infty$

et on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 + \frac{4}{n} = 3$

On a donc, par quotient de limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

• $w_n = n^2 e^n - 4e^n = (n^2 - 4)e^n$ Or on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 4 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$

On a donc, par produit de limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$

Corrigé Entraînement 3

• $x_n = 2\sqrt{n} - 7n = n \left(\frac{2\sqrt{n}}{n} - 7 \right) = n \left(\frac{2}{\sqrt{n}} - 7 \right)$ Or on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{n}} - 7 \right) = -7$

On a donc, par produit de limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty$

• $y_n = \frac{3^n-1}{3^{2n}-2} = \frac{3^n \left(1 - \frac{1}{3^n} \right)}{3^n \left(3^n - \frac{2}{3^n} \right)} = \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{3^n - \frac{2}{3^n}} = \frac{1 - 3^{-n}}{3^n - 3^{-n}}$ Or on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - 3^{-n} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n - 3^{-n} = +\infty$

On a donc, par quotient de limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$

• $z_n = \frac{3n \ln(n) - 2 \ln(n)}{-5 \ln(n)} = \frac{(3n-2) \ln(n)}{-5 \ln(n)} = \frac{3n-2}{-5} = -\frac{3}{5}n + \frac{2}{5}$ On a, par somme de limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = -\infty$

Corrigé Entraînement 4

• $c_n = -5n^3 + n^2 + 4 = n^3 \left(-5 + \frac{1}{n} + \frac{4}{n^3} \right)$ Or on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-5 + \frac{1}{n} + \frac{4}{n^3} \right) = -5$
On a donc, par produit de limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = -\infty$

• $d_n = \frac{3n-5}{7-2n} = \frac{n \left(3 - \frac{5}{n} \right)}{n \left(-2 + \frac{7}{n} \right)} = \frac{3 - \frac{5}{n}}{-2 + \frac{7}{n}}$ Or on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 - \frac{5}{n} = 3$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -2 + \frac{7}{n} = -2$
On a donc, par quotient de limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = -\frac{3}{2}$

• $s_n = 3^n - 6^n = 6^n \left(\left(\frac{3}{6} \right)^n - 1 \right) = 6^n \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n - 1 \right)$ Or on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 6^n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n - 1 = -1$
On a donc, par produit de limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = -\infty$

Corrigé Entraînement 5

• $c_n = n^3 - 5n^2 + 1 = n^3 \left(1 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^3} \right)$ Or on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^3} \right) = 1$
On a donc, par produit de limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = +\infty$

• $d_n = \frac{e^n}{1-2e^n} = \frac{e^n}{e^{n \left(\frac{1}{e^n} - 2 \right)}} = \frac{1}{e^{-n} - 2}$ Or on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} - 2 = -2$
On a donc, par inverse de limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = -\frac{1}{2}$

• $s_n = \frac{1-3n}{n^2+2n-3} = \frac{n \left(\frac{1}{n} - 3 \right)}{n^2 \left(1 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2} \right)} = \frac{\frac{1}{n} - 3}{n \left(1 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2} \right)}$ Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} - 3 = -3$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2} \right) = +\infty$

On a donc, par quotient de limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 0$

Corrigé Entraînement 6

• $c_n = 3n^2 - 2n^4 + n = n^4 \left(\frac{3}{n^2} - 2 + \frac{1}{n^3} \right)$ Or on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^4 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{n^2} - 2 + \frac{1}{n^3} \right) = -2$
On a donc, par produit de limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = -\infty$

• $d_n = 3\sqrt{n} - n = \sqrt{n} \left(3 - \frac{n}{\sqrt{n}} \right) = \sqrt{n} (3 - \sqrt{n})$ Or on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 - \sqrt{n} = -\infty$
On a donc, par produit de limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = -\infty$

• $s_n = \frac{3^n - 5}{1 - 4 \times 3^n} = \frac{3^n \left(1 - \frac{5}{3^n} \right)}{3^n \left(\frac{1}{3^n} - 4 \right)} = \frac{1 - \frac{5}{3^n}}{\frac{1}{3^n} - 4}$ Or on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{5}{3^n} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^n} - 4 = -4$
On a donc, par quotient de limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = -\frac{1}{4}$