Savoir Si. 4 : Sens de variation d'une suite

Entraînement 1

1) (S_n) définie par $S_0 = -4$ et $S_{n+1} = 3 - {S_n}^2$. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n < 0$

Démontrer par récurrence que la suite (S_n) est décroissante.

2) Soit la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = x + e^{-x}$.

On admet que u_n est positif pour tout n. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

Entraînement 2

1) Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$ et $u_0 = \frac{3}{2}$.

a. Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$

b. On admet que, pour tout n, on a $u_n > 0$. En déduire que la suite (u_n) est une suite décroissante

2) (x_n) définie par $x_1 = 1$ et pour $n \geq 1$: $x_{n+1} = -\frac{1}{3x_n+6} + 2$. On admet que $x_n > 0$ pour tout entier $n \geq 1$

Montrer que la suite (x_n) est croissante

Entraînement 3

1) (a_n) définie par $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$. On admet que, pour tout entier naturel n, on a $a_n \geq 0$

Démontrer par récurrence que la suite est croissante.

2) Soit (w_n) la suite définie par $w_{n+1} = w_n - w_n^2$ et $w_1 = -1$.

a. Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + x$

b. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $w_{n+1} \leq w_n \leq 0$

Que peut-on en déduire sur le sens de variation de (w_n) ?

Entraînement 4

1) Soit la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 1 + \ln(u_n)$.

a. Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $u_{n+1} = f(u_n)$

b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$

Que peut-on en déduire sur le sens de variation de (u_n) ?

2) (w_n) définie par $w_0 = 10$ et $w_{n+1} = 3 - \frac{1}{w_n}$. On admet que, pour tout entier naturel n, on a $w_n > 0$

a. Calculer w_1 et w_2 puis conjecturer le sens de variation de la suite

b. Le démontrer par récurrence.

Entraînement 5

1) On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 2\sqrt{x+1}$.

En étudiant le sens de variation de la fonction f sur $[0; +\infty[$, montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 5$.

2) (a_n) définie par $a_0 = -2$ et $a_{n+1} = 4 - 2a_n^2$. On admet que, pour tout entier naturel n, on a $a_n < 0$

a. Calculer a_1 et a_2 puis conjecturer le sens de variation de la suite

b. Le démontrer par récurrence.

Corrigé Savoir Si. 4

Corrigé Entraînement 1

1) Initialisation : Pour $n = 0$ on a $s_1 = 3 - (-4)^2 = -13 \leq s_0$ **Donc $s_{n+1} \leq s_n$ est vraie pour $n = 0$**

Hérédité : **Si $s_{n+1} \leq s_n$ est vraie pour $n = p$** alors on a : $s_{p+1} \leq s_p$

Or tous les termes de la suite sont négatifs, donc $s_{p+1}^2 \geq s_p^2$ et $-s_{p+1}^2 \leq -s_p^2$

On a $3 - s_{p+1}^2 \leq 3 - s_p^2$ c'est-à-dire $\boldsymbol{s_{p+2} \leq s_{p+1}}$

Alors $s_{n+1} \leq s_n$ est vraie pour $n = p + 1$

Conclusion : Pour tout entier naturel n, on a : **$s_{n+1} \leq s_n$ donc la suite est décroissante**

2) On a $f'(x) = 1 - e^{-x}$

Et $1 - e^{-x} \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq e^{-x} \Leftrightarrow 0 \geq -x \Leftrightarrow 0 \leq x$

Donc f est croissante sur $[0; +\infty[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

Montrons par récurrence que $\boldsymbol{u_n \leq u_{n+1}}$

Initialisation : Pour $n = 0$ on a $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = \frac{1}{2} + e^{-\frac{1}{2}} > \frac{1}{2}$ donc $u_0 \leq u_1$

Donc $u_n \leq u_{n+1}$ est vraie pour $n = 0$

Hérédité : **Si $u_n \leq u_{n+1}$ est vraie pour $n = p$** alors on a : $u_p \leq u_{p+1}$

Or f est croissante pour $x \geq 0$ donc $f(u_p) \leq f(u_{p+1})$

$\Leftrightarrow u_{p+1} \leq u_{p+2}$

Alors $u_n \leq u_{n+1}$ est vraie pour $n = p + 1$

Conclusion : Pour tout entier naturel n, on a : **$u_n \leq u_{n+1}$: la suite est croissante**

Corrigé Entraînement 2

1) On a $f(x) = \frac{x}{1+x}$ et $f'(x) = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} \geq 0$

Donc f est croissante sur $[0; +\infty[$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$
$f(x)$	↗	

Montrons par récurrence que $0 < u_{n+1} \leq u_n$

Initialisation : Pour $n = 0$ on a $u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_1 = \frac{3}{2} \div \left(1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{5}{3}$ donc $0 < u_1 \leq u_0$

Donc $0 < u_{n+1} \leq u_n$ est vraie pour $n = 0$

Hérédité : **Si $0 < u_{n+1} \leq u_n$ est vraie pour $n = p$** alors on a :

$0 < u_{p+1} \leq u_p$

Or la fonction f est croissante pour $x \geq 0$

donc $f(0) < f(u_{p+1}) \leq f(u_p) \Leftrightarrow 0 < u_{p+2} \leq u_{p+1}$

Alors $0 < u_{n+1} \leq u_n$ est vraie pour $n = p + 1$

Conclusion : Pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_{n+1} \leq u_n$ **: la suite est décroissante**

2) Initialisation : Pour $n = 1$ on a $x_2 = -\frac{1}{3\times1+6} + 2 = 2 - \frac{1}{9} = \frac{17}{9} > 1$ donc $x_2 \geq x_1$

Donc $x_{n+1} \geq x_n$ est vraie pour $n = 1$

Hérédité : **Si $x_{n+1} \geq x_n$ est vraie pour $n = p$** alors, on a

$x_{p+1} \geq x_p$ donc $3x_{p+1} + 6 \geq 3x_p + 6$

Tous les termes de la suite sont positifs, donc $3x_n + 6 > 0$ aussi

alors $\frac{1}{3x_{p+1}+6} \leq \frac{1}{3x_p+6} \Rightarrow \frac{-1}{3x_{p+1}+6} \geq \frac{-1}{3x_p+6}$ et $\frac{-1}{3x_{p+1}+6} - 2 \geq \frac{-1}{3x_p+6} - 2$

On a bien $x_{p+2} \geq x_{p+1}$ **Alors $x_{n+1} \geq x_n$ est vraie pour $n = p + 1$**

Conclusion : Pour tout entier naturel n, on a : **$x_{n+1} \geq x_n$ la suite est croissante**

Corrigé Entraînement 3

1) Initialisation : pour $n = 0$, $u_1 = \sqrt{2}$ donc $u_1 > u_0$ **Donc $u_{n+1} \geq u_n$ est vraie pour $n = 0$**

Hérédité : **Si $u_{n+1} \geq u_n$ est vraie pour $n = p$ alors : $u_{p+1} \geq u_p$**

Donc $2u_{p+1} \geq 2u_p$ et $\sqrt{2u_{p+1}} \geq \sqrt{2u_p}$

On a bien **$u_{p+2} \geq u_{p+1}$** **Alors $u_{n+1} \geq u_n$ est vraie pour $n = p + 1$**

Conclusion : Pour tout entier naturel n, on a : **$u_{n+1} \geq u_n$**

la suite (u_n) est croissante

2) On a $f'(x) = -2x + 1$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↘

Initialisation : Pour $n = 1$ on a $w_1 = -1$ et $w_2 = -(-1)^2 - 1 = -2$
donc $w_2 \leq w_1 \leq 0$ **Donc $w_{n+1} \leq w_n \leq 0$ est vraie pour $n = 1$**

Hérédité : **Si $w_{n+1} \leq w_n \leq 0$ est vraie pour $n = p$** alors, on a :

$w_{p+1} \leq w_p \leq 0$. Or la fonction f est croissante pour $x \leq \frac{1}{2}$ donc $f(w_{p+1}) \leq f(w_p) \leq f(0)$

$\Leftrightarrow \; w_{p+2} \leq w_{p+1} \leq 0$

Alors $w_{n+1} \leq w_n \leq 0$ est vraie pour $n = p + 1$

Conclusion : Pour tout entier $n \geq 1$, on a : **$w_{n+1} \leq w_n \leq 0$**

La suite est (w_n) est décroissante (à termes tous négatifs)

Corrigé Entraînement 4

1) a. Soit $f(x) = 1 + \ln x$ On a $f'(x) = \frac{1}{x}$

Donc f est croissante sur $]0; +\infty[$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$
$f(x)$	||	↗

b. Initialisation : Pour $n = 0$ on a $u_0 = 2$ et $u_1 = 1 + \ln 2 \simeq 1{,}7$ donc $u_1 \leq u_2$

Donc $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$ **est vraie pour $n = 0$**

Hérédité : **Si $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$ est vraie pour $n = p$** alors on a : $1 \leq u_{p+1} \leq u_p \leq 2$

Or la fonction f est croissante donc $1 \leq f(u_{p+1}) \leq f(u_p) \leq f(2)$

Avec $f(1) = 1$ et $f(2)1 + \ln 2 \simeq 1{,}7$

on en déduit $1 \leq u_{p+2} \leq u_{p+1} \leq 1 + \ln 2$

Et par élargissement, $1 \leq u_{p+2} \leq u_{p+1} \leq 2$ **Alors est vraie pour $n = p + 1$**

Conclusion : Pour tout entier naturel n, on a : $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$

La suite (u_n) est donc décroissante

2) Initialisation : pour $n = 0$, $u_1 = 3 - \frac{1}{10} = 2{,}9$ donc $u_1 < u_0$ **Donc $u_{n+1} \leq u_n$ est vraie pour $n = 0$**

Hérédité : **Si $u_{n+1} \leq u_n$ est vraie pour $n = p$** alors : $u_{p+1} \leq u_p$

Or on a admis qu'il s'agit d'ne suite à termes positifs donc $\frac{1}{u_{p+1}} \geq \frac{1}{u_p} \Leftrightarrow -\frac{1}{u_{p+1}} \leq -\frac{1}{u_p}$

$\Leftrightarrow\ 3 - \frac{1}{u_{p+1}} \leq 3 - \frac{1}{u_p}$ On a bien $\boldsymbol{u_{p+2} \leq u_{p+1}}$ **Alors $u_{n+1} \leq u_n$ est vraie pour $n = p + 1$**

Conclusion : Pour tout entier naturel n, on a : $\boldsymbol{u_{n+1} \leq u_n}$ **la suite (u_n) est décroissante**

Corrigé Entraînement 5

1) On a $f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \geq 0$ Donc f est croissante sur $[0; +\infty[$

x	0 $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$

Initialisation : Pour $n = 0$ on a $u_0 = 0$ et $u_1 = 2$ donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 5$

Donc $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 5$ est vraie pour $n = 0$

Hérédité : **Si $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 5$ est vraie pour $n = p$** alors, on a : $0 \leq u_p \leq u_{p+1} \leq 5$

Or la fonction f est croissante pour $x \geq 0$ donc $f(0) \leq f(u_p) \leq f(u_{p+1}) \leq f(5)$

Avec $f(0) = 2$ et $f(5) = 2\sqrt{6} \simeq 4{,}9$ on a $2 \leq u_{p+1} \leq u_{p+2} \leq 2\sqrt{6}$

Et par élargissement $0 \leq u_{p+1} \leq u_{p+2} \leq 5$

Alors $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 5$ est vraie pour $n = p + 1$

Conclusion : Pour tout entier naturel n, on a : $\boldsymbol{0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 5}$

La suite (u_n) est croissante

2) a. $a_0 = -2$ et $a_1 = 4 - 2 \times (-2)^2 = -4$ on a $a_1 < a_0$ la suite semble décroissante

b. Initialisation : fait la question d'avant **Donc $a_{n+1} \leq a_n$ est vraie pour $n = 0$**

Hérédité : **Si $a_{n+1} \leq a_n$ est vraie pour $n = p$ alors: $a_{p+1} \leq a_p$** < 0 car les termes de la suite sont négatifs

Donc $a_{p+1}^2 \geq a_p^2$ et $-2\,a_{p+1}^2 \leq -2a_p^2 \Rightarrow 4 - 2\,a_{p+1}^2 \leq 4 - 2a_p^2 \Rightarrow$ $\boldsymbol{a_{p+2} \leq a_{p+1}}$

Alors $a_{n+1} \leq a_n$ est vraie pour $n = p + 1$

Conclusion : Pour tout entier naturel n, on a : $\boldsymbol{a_{n+1} \leq a_n}$ **la suite (u_n) est décroissante**