

Corrigés Savoirs Fle. 5

Corrigé Exercice 18

1) a) $\ln(1,02) > 0$ b) $\ln(0,98) < 0$ c) $\ln\left(\frac{5}{8}\right) < 0$

d) $\ln\left(\frac{0,1}{0,03}\right) = \ln\left(\frac{10}{3}\right) > 0$ e) $-3 \ln\left(\frac{1}{4}\right) = 3 \ln 4 > 0$
(ou $\ln\left(\frac{1}{4}\right) < 0$ et ...)

2) a) $\ln x > -3 \Leftrightarrow x > e^{-3} \Rightarrow S =]e^{-3}; +\infty[$

b) $e^x \leq 7 \Leftrightarrow x \leq \ln 7 \Rightarrow S =]-\infty; \ln 7]$

c) $e^x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow e^x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq \ln 3 \Rightarrow S =]-\infty; \ln 3]$

d) $2e^x - 1 \geq 2 \Leftrightarrow e^x \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow x \geq \ln \frac{3}{2} \Rightarrow S = \left[\ln\left(\frac{3}{2}\right); +\infty\right[$

e) $1 + 3 \ln x > -2 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1} \Rightarrow S = \left]\frac{1}{e}; +\infty\right[$

f) $-3 \ln x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq -\frac{2}{3} \Leftrightarrow x \leq e^{-\frac{2}{3}}$
On résout pour $x > 0 \Rightarrow S = \left]0; e^{-\frac{2}{3}}\right]$

3) a) $\ln(4 - x) \geq 2 \Leftrightarrow 4 - x \geq e^2 \Leftrightarrow x \leq 4 - e^2$
 $\Rightarrow S =]-\infty; 4 - e^2]$

b) $e^{x+3} \leq 5 \Leftrightarrow x + 3 \leq \ln 5 \Leftrightarrow x \leq \ln 5 - 3$
 $S =]-\infty; \ln 5 - 3]$

c) $\ln\left(\frac{1}{2}x + 2\right) < -1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + 2 \leq e^{-1} \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{e} - 4$

On résout pour $x > -4 \Rightarrow S = \left]-4; -4 + \frac{2}{e}\right]$

ed) $e^{5-x} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow 5 - x \leq \ln 2 \Leftrightarrow x \geq 5 - \ln 2$
 $\Rightarrow S = [5 - \ln 2; +\infty[$

e) $\ln(x + 2) + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x + 2 \geq e^{-3} \Leftrightarrow x \geq e^{-3} - 2$
 $\Rightarrow S = [-2 + e^{-3}; +\infty[$

f) $e^{-x^2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -x^2 \leq \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow -x^2 \leq -\ln 2 \Leftrightarrow x^2 \geq \ln 2$
 $\Leftrightarrow x \leq -\sqrt{\ln 2} \text{ ou } x \geq \sqrt{\ln 2}$
 $S =]-\infty; -\sqrt{\ln 2}] \cup [\sqrt{\ln 2}; +\infty[$

4) a) $e^{-3x} > e \Leftrightarrow -3x > 1 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{3} \Rightarrow S =]-\infty; -\frac{1}{3}[$

b) $e^{2x} \geq e^{x+4} \Leftrightarrow 2x \geq x + 4 \Leftrightarrow x \geq 4 \Rightarrow S = [4; +\infty[$

b) $\frac{1}{e^{x^2}} \geq e^{5x} \Leftrightarrow e^{-x^2} \geq e^{5x} \Leftrightarrow -x^2 \geq 5x \Leftrightarrow x(x + 5) \leq 0$
 $x_1 = -5; x_2 = 0 \Rightarrow S = [-5; 0]$

Un peu plus...

1) f) $\ln\left(5 - \frac{16}{7}\right) = \ln\left(\frac{19}{7}\right) > 0$

g) $-2 \ln\left(\frac{9}{4} - 1\right) = -2 \ln\left(\frac{5}{4}\right) < 0$
(à cause du -2)

2) g) $\ln x + 1 \leq 6 \Leftrightarrow \ln x \leq 5 \Leftrightarrow x \leq e^5$
On résout pour $x > 0 \Rightarrow S =]0; e^5]$

h) $\ln x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq e$
On résout pour $x > 0 \Rightarrow S =]0; e]$

i) $\frac{2}{3} - e^x \geq 0 \Leftrightarrow e^x \leq \frac{2}{3}$
 $\Leftrightarrow x \leq \ln\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow S =]-\infty; \ln\left(\frac{2}{3}\right)]$

3) g) $e^{3x-1} > 12$
 $\Leftrightarrow 3x - 1 \geq \ln 2$
 $\Leftrightarrow x \geq \frac{\ln 2 + 1}{3}$
 $\Rightarrow S = \left[\frac{\ln 2 + 1}{3}; +\infty\right[$

h) $\ln\left(\frac{1}{x} + 1\right) > 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + 1 > e^2$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{x} > e^2 - 1$
Pour $x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{e^2 - 1}$
 $\Rightarrow S = \left]0; \frac{1}{e^2 - 1}\right[$

4) f) $\frac{1}{e^{x-1}} < e^{2x+3} \Leftrightarrow e^{-x+1} < e^{2x+3}$
 $\Leftrightarrow -x + 1 < 2x + 3 \Leftrightarrow 3x > -2$
 $S = \left]-\frac{2}{3}; +\infty\right[$

$$d) \ln(-x+1) \geq \ln x \Leftrightarrow -x+1 \geq x \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$$

on résout pour $x \in]0; 1[\Rightarrow S =]0; \frac{1}{2}]$

$$e) \ln\left(\frac{3x-1}{x+2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{3x-1}{x+2}\right) \geq \ln 1 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{x+2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{3x-1-(x+2)}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{x+2} \geq 0$$

Il faut faire un tableau de signe pour $x > 1$

x	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x-3$	-	0	+
$x+2$	+		+
Quotient	-	0	+

$$S = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$$

$$g) e^2 - e^{x^2-x} \leq 0 \Leftrightarrow e^2 \leq e^{x^2-x}$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq x^2 - x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \geq 0$$

$$\Delta = 9 \text{ et } x_1 = 2; x_2 = -1$$

$$S =]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$$

$$h) \ln(3-2x) < \ln(x-3)$$

$$\Leftrightarrow 3-2x < x-3 \Leftrightarrow x > 2$$

$$\text{on résout pour } x > 3 \Rightarrow S =]3; +\infty[$$

$$i) \ln(x^2+x) \leq \ln 6$$

$$\Leftrightarrow x^2+x \leq 6 \Leftrightarrow x^2+x-6 \leq 0$$

$$\text{avec } \Delta = 25; x_1 = 2 \text{ et } x_2 = -3$$

c'est négatif à l'intérieur des racines sur $[-3; 2]$, mais on résout pour $x > 0$

$$\Rightarrow S =]0; 2]$$

Corrigé Exercice 19

$$1) a) 4^n \geq 204 \Leftrightarrow n \ln 4 \geq \ln 204 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 204}{\ln 4} \text{ or } \frac{\ln 204}{\ln 4} \simeq 3,8$$

Donc pour $n \geq 4$

$$b) (0,7)^n \leq 10^{-2} \Leftrightarrow n \ln 0,7 \leq \ln 0,01 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln 0,7} \text{ car } \ln 0,7 < 0$$

$$\text{or } \frac{\ln 0,01}{\ln 0,7} \simeq 12,9 \Rightarrow \text{pour } n \geq 13$$

$$c) 196 - 6 \times 5^n \leq 100 \Leftrightarrow 5^n \geq 16 \Leftrightarrow n \ln 5 \geq \ln 16 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 16}{\ln 5}$$

$$\text{or } \frac{\ln 16}{\ln 5} \simeq 1,7 \Rightarrow \text{pour } n \geq 2$$

$$2) a. 1000 - 5 \times 2^n \leq 0 \Leftrightarrow 2^n \geq 200 \Leftrightarrow n \ln 2 \geq \ln 200$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 200}{\ln 2} \text{ or } \frac{\ln 200}{\ln 2} \simeq 7,6$$

$\Rightarrow$ pour $n \geq 8$ (à partir du rang 8)

$$b. 30 + 2 \times 4^{n-1} > 30\,000 \Leftrightarrow 4^{n-1} > 14\,985$$

$$\Leftrightarrow \ln(4^{n-1}) > \ln 14\,985 \Leftrightarrow (n-1) \ln 4 > \ln 14\,985 \text{ or } \ln 4 > 0$$

$$\text{donc } n-1 > \frac{\ln 14\,985}{\ln 4} \Leftrightarrow n > \frac{\ln 14\,985}{\ln 4} + 1 \text{ avec } \frac{\ln 14\,985}{\ln 4} \simeq 6,9$$

Donc pour $n \geq 8$ à partir du rang 8

$$3) \text{ On a } S_n = S_0 \times q^n = 2 \times 3^n$$

$$\text{Donc on cherche } 2 \times 3^n \geq 12\,680 \Leftrightarrow 3^n \geq 6\,340$$

$$\Leftrightarrow \ln(3^n) \geq \ln 6340 \Leftrightarrow n \ln 3 \geq \ln 6340 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 6340}{\ln 3}$$

$$\text{or } \frac{\ln 6340}{\ln 3} \simeq 7,97 \text{ Donc } n \geq 8 \text{ à partir du rang 8}$$

Un peu plus...

$$1) -5 \times 2^n \leq -105$$

$$\Leftrightarrow 5 \times 2^n \geq 105$$

$$\Leftrightarrow 2^n \geq 21$$

$$\Leftrightarrow n \ln 2 \geq \ln 21$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 21}{\ln 2} \text{ or } \frac{\ln 21}{\ln 2} \simeq 4,4$$

Donc pour $n \geq 5$

$$2) 10 \times 0,9^n + 250 < 252$$

$$\Leftrightarrow 10 \times 0,9^n < 2$$

$$\Leftrightarrow 0,9^n < 0,2$$

$$\Leftrightarrow n \ln 0,9 < \ln 0,2$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln 0,2}{\ln 0,9}$$

$$\text{or } \frac{\ln 0,2}{\ln 0,9} \simeq 15,3$$

Donc $n \geq 16$

(à partir du rang 16)

$$3) \text{ On a } u_n = u_1 \times q^{n-1} = 100 \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$$

$$\text{Donc on cherche } 100 \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \leq \frac{1}{100} \Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{100}\right)$$

$$\Leftrightarrow (n-1) \ln\left(\frac{4}{5}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{100}\right)$$

$$\text{et } \ln\left(\frac{4}{5}\right) < 0 \text{ donc } n-1 \geq \frac{\ln\left(\frac{1}{100}\right)}{\ln\left(\frac{4}{5}\right)}$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{1}{100}\right)}{\ln\left(\frac{4}{5}\right)} + 1 \text{ Or } \frac{\ln\left(\frac{1}{100}\right)}{\ln\left(\frac{4}{5}\right)} \simeq 20,6 \text{ donc}$$

$n \geq 22$ (à partir du rang 22)

Corrigé Exercice 20

1) $D_f =]0; +\infty[$

$2 \ln x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -2$

$\Leftrightarrow x \geq e^{-2}$

x	0	e^{-2}	$+\infty$
$f(x)$		- 0	+

$D_k =]2; +\infty[$

$\ln(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x-2 \geq 1$

$\Leftrightarrow x \geq 3$

x	2	3	$+\infty$
$k(x)$		- 0	+

$D_h = \mathbb{R}$

$2 - e^{-x} \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x} \leq 2$

$\Leftrightarrow -x \leq \ln 2 \Leftrightarrow x \geq -\ln 2$

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

$D_l =]-\infty; \frac{1}{2}[$

$\ln(1-2x) \geq 2 \Leftrightarrow 1-2x \geq e^2$

$\Leftrightarrow 2x \leq 1 - e^2 \Leftrightarrow x \leq \frac{1-e^2}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{1-e^2}{2}$	$\frac{1}{2}$
$l(x)$		+	0 -

$D_i = \mathbb{R}$

$e^x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq \ln 3$

x	$-\infty$	$\ln 3$	$+\infty$
$h(x)$	-	0	+

$D_m = \mathbb{R}$

$-2e^{3x-6} \leq 0$ car exponentielle toujours positive

x	$-\infty$	$+\infty$
$m(x)$	-	

$D_j =]0; +\infty[$

$5 \ln x - 20 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq e^4$

x	0	e^4	$+\infty$
$j(x)$		- 0	+

$D_n =]-3; +\infty[$

$\ln(x+3) \geq 2 \Leftrightarrow x+3 \geq e^2 \Leftrightarrow x \geq e^2 - 3$

x	-3	$e^2 - 3$	$+\infty$
$n(x)$		- 0	+

2) Je vous laisse faire les étapes...

$D_f =]1; +\infty[$ $\ln(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x-1 \geq 1$

x	1	2	$+\infty$
x		+	
$\ln(x-1)$		- 0	+
$f(x)$		- 0	+

$D_h =]0; +\infty[$ $1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq e$

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln x$		- 0	+	
$1 - \ln x$		+		+
$h(x)$		- 0	+	0 -

$D_i =]0; +\infty[$ et $i(x) = x(5 - \ln x)$

x	0	e^5	$+\infty$
x	0	+	
$5 - \ln x$		+	0 -
$i(x)$		+	0 -

$D_j =]\ln 2; +\infty[$ et $\ln(e^x - 2) \geq 0$

$\Leftrightarrow e^x - 2 \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq \ln 3$

x	$\ln 2$	$\ln 3$	$+\infty$
$j(x)$		- 0	+

$D_k =]0; e^3[\cup]e^3; +\infty[$

x	0	e	e^3	$+\infty$
$\ln x - 1$		- 0	+	
$3 - \ln x$		+		+
$k(x)$		- 0	+	

$D_l =]-\infty; 0[$ $\ln(-x) \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -1$

x	$-\infty$	-1	0
$\ln(-x)$	+	0	-
$2x - 1$	-		-
$l(x)$	-	0	+

Corrigé Exercice 21

a) $D_g =]0; +\infty[$

b) $g'(x) = 3 \ln x + 3x \times \frac{1}{x} - 9 = 3 \ln x + 3 - 9 = 3 \ln x - 6$ CQFD.

c) $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3 \ln x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq e^2 \Rightarrow S = [e^2; +\infty[$

On a $g(1) = 3 \ln 1 - 9 + 10 = 1$

$g(e^2) = 3e^2 \ln e^2 - 9e^2 + 10 = 3e^2 \times 2 - 9e^2 + 10 = 10 - 3e^2$

$g(20) = 60 \ln 20 - 180 + 10 = 60 \ln 20 - 170.$

x	1	e^2	20
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	1	$\searrow$ $10 - 3e^2$	$\nearrow$ $60 \ln 20 - 170$

d) g est continue et strictement décroissante sur $[1; e^2]$ avec $g(1) > 0$ et $g(e^2) < 0$.

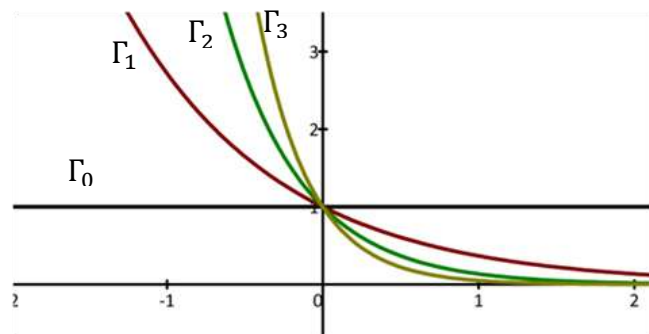
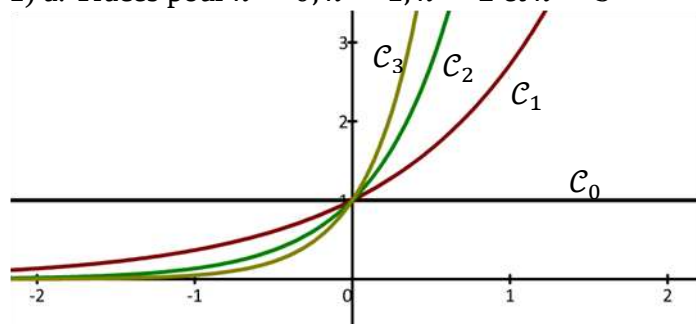
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet donc une solution sur cet intervalle. On procède de même sur l'intervalle $[e^2; 20]$, avec $g(e^2) < 0$, $g(20) > 0$ et g croissante. L'équation $g(x) = 0$ a donc **deux solutions** sur l'intervalle $[1; 20]$.

On a : $g(1,17) > 0$ et $g(1,18) < 0$ donc la première solution est $x_1 \approx 1,2$.

Et : $g(16,38) < 0$ et $g(16,39) > 0$ donc la deuxième solution est $x_2 \approx 16,4$.

Corrigé Exercice 22

1) a. Tracés pour $k = 0; k = 1; k = 2$ et $k = 3$



b. On a : $f'_k(x) = ke^{kx}$ et $g'_k(x) = -ke^{-kx}$

Si $k = 0$, alors les dérivées sont nulles, et les **fonctions sont constantes** : $f_0(x) = e^0 = 1$ et $g_0(x) = 1$

Si $k > 0$, alors f' est strictement positive, et **f est strictement croissante**, et g' est strictement négative, donc **g est strictement décroissante**

c. Pour se donner un idée, tracés pour $k = 1$ et $k = 5$

Si $k = 0$ les deux courbes sont confondues (les fonctions sont égales)

Si $k > 0$, on a $f(x) - g(x) = e^{kx} - e^{-kx} = e^{kx} - \frac{1}{e^{kx}}$

On cherche à résoudre $f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{kx} - \frac{1}{e^{kx}} \geq 0 \Leftrightarrow e^{kx} \geq \frac{1}{e^{kx}} \Leftrightarrow (e^{kx})^2 \geq 1$ car l'exponentielle est positive $\Leftrightarrow e^{2kx} \geq 1 \Leftrightarrow 2kx \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$ car $k > 0$

Donc C_k est au dessus de Γ_k sur $\mathbb{R}^+$ et en dessous sur $\mathbb{R}^-$

d. $f_m(x) - f_k(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{mx} - e^{kx} \geq 0 \Leftrightarrow e^{mx} \geq e^{kx} \Leftrightarrow mx \geq kx \Leftrightarrow (m - k)x \geq 0$

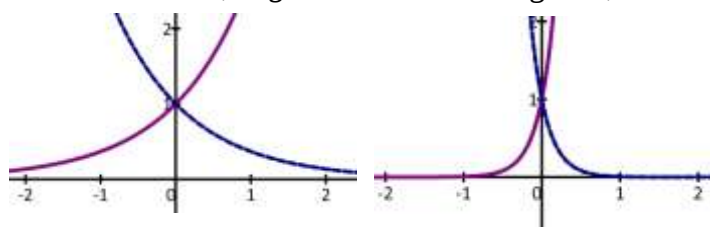
Comme $m > k$, on a $(m - k) > 0$ Donc $f_m(x) - f_k(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$

C_m est au dessus de C_k sur $\mathbb{R}^+$ et en dessous sur $\mathbb{R}^-$

e. $g_m(x) - g_k(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{-mx} - e^{-kx} \geq 0 \Leftrightarrow e^{-mx} \geq e^{-kx} \Leftrightarrow -mx \geq -kx \Leftrightarrow (-m + k)x \geq 0$

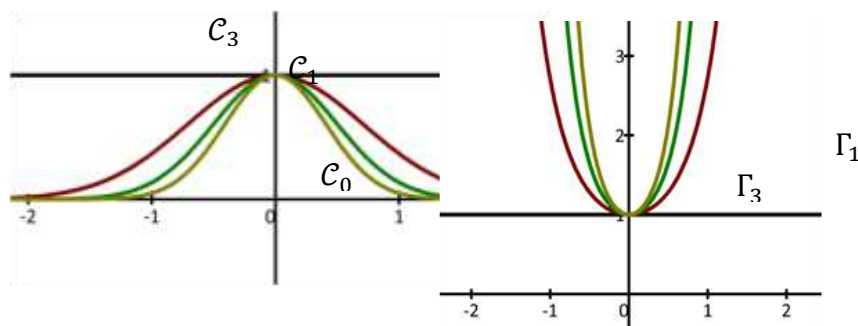
Comme $m > k$, on a $(-m + k) < 0$ Donc $g_m(x) - g_k(x) \geq 0$ pour $x \leq 0$

Γ_m est au dessus de Γ_k sur $\mathbb{R}^-$ et en dessous sur $\mathbb{R}^+$



Corrigé Exercice 23

a. Tracés pour $k = 0; k = 1;$
 $k = 2$ et $k = 3$



b. $h_k(x) = 2kxe^{kx^2}$

et $i_k(x) = -2kxe^{-kx^2}$

Si $k = 0$, alors les dérivées

sont nulles, et les **fonctions sont**

constantes : $h_0(x) = e^0 = 1$ et $i_0(x) = 1$

Si $k > 0$, alors

x	0
$2kx$	— 0 +
$h'(x)$	— 0 +
$h(x)$	↘ 1 ↗

x	0
$-2kx$	+ 0 —
$i'(x)$	+ 0 —
$i(x)$	↗ 1 ↘

c. Si $k = 0$ les deux courbes sont confondues (les fonctions sont égales)

Si $k > 0$, d'après les tableaux de variations, on a $h(x) \geq 1$ et $i(x) \leq 1$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Donc **C_k est au dessus de Γ_k sur $\mathbb{R}$. Elles ont le point $(0; 1)$ en commun.**

d. $h_m(x) - h_k(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{mx^2} - e^{kx^2} \geq 0 \Leftrightarrow e^{mx^2} \geq e^{kx^2} \Leftrightarrow mx^2 \geq kx^2 \Leftrightarrow (m - k)x^2 \geq 0$

Comme $m > k$, on a $(m - k) > 0$ Donc $f_m(x) - f_k(x) > 0$ pour $x \neq 0$ et $f_m(0) = f_k(0)$

C_m est au dessus de C_k sur $\mathbb{R}$. Toutes les courbes ont le point $(0; 1)$ en commun.

e. $g_m(x) - g_k(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{-mx^2} - e^{-kx^2} \geq 0 \Leftrightarrow e^{-mx^2} \geq e^{-kx^2} \Leftrightarrow -mx^2 \geq -kx^2$

$\Leftrightarrow (-m + k)x^2 \geq 0$ Comme $m > k$, on a $(-m + k) < 0$ Donc $g_m(x) - g_k(x) < 0$ pour $x \neq 0$

Γ_m est en dessous sur $\mathbb{R}$. Toutes les courbes ont le point $(0; 1)$ en commun.