Remarque : En absence de précision, un « **entier** » sera toujours un « entier **relatif** » , $n \in \mathbb{Z}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on précisera toujours « entier **naturel** » ou « entier **positif** »

Savoir A. 1 : Diviseurs, divisibilité et division euclidienne

Exercice 1 : Diviseurs et multiples

1) a. Établir dans $\mathbb{N}$ la liste des diviseurs des nombres 36, 49 et 126. Même question pour 49, mais dans $\mathbb{Z}$

d) Déterminer dans $\mathbb{Z}$ la liste des diviseurs communs de 12 et 50.

b) Combien d'entiers compris entre −50 et 75 le nombre 17 divise-t-il ?

c) Un rectangle a des dimensions en cm qui sont des entiers. Quelles peuvent être ses dimensions, sachant que son aire est 30 cm^2

2) Donner l'expression générale des nombres suivants :

a. Un nombre n multiple de 5

b. Un nombre n dont 3 est un diviseur

c. Les entiers n tels que 6 divise $n + 5$

3) On appelle diviseur strict de l'entier naturel n tout diviseur d de n vérifiant $0 < d < n$.
Deux entiers naturels distincts sont dits **amicaux** lorsque chacun de ces entiers est égal à la somme des diviseurs stricts de l'autre.

a. Vérifier que 220 et 284 sont des entiers amicaux

b. Déterminer les sommes des diviseurs positifs de 48 et de 75.
Quelle relations y-a-t-il entre ces deux sommes ? (Ces nombres sont dits **quasi-amicaux**)

Exercice 2 : Équations Diophantiennes

1) Soient n et p deux entiers naturels tels que $(n - 4)(p + 3) = 4$.

a. Que peut-on dire des nombres $n - 4$ et $p + 3$ par rapport à 4 ?

b. En déduire tous les couples d'entiers $(n; p)$ qui vérifient cette égalité.

2) Déterminer tous les couples $(x\,; y)$ d'entiers naturels tels que $x^2 = y^2 + 15$.

3) Résoudre l'équation $x^2 = 9y^2 + 7$, avec x et y entiers.

Exercice 3 : Suite de Syracuse

On définit la suite S_n de la façon suivante :
- Si S_n est **pair**, alors $\boldsymbol{S_{n+1} = \frac{S_n}{2}}$
- Si S_n est **impair**, alors $\boldsymbol{S_{n+1} = 3S_n + 1}$

Cette suite est appelée suite de Syracuse (elle dépend évidemment du choix de S_0)

En 1937, Lothar Collatz a émit la conjecture, appelée « conjecture de Syracuse », que, quel que soit le 1er terme S_0, la suite finirait toujours par avoir un terme égal à 1, et bouclerait ensuite sur le cycle trivial (4 ; 2 ; 1) : c'est-à-dire qu'à partir du moment où on a un entier p pour lequel $S_p = 1$, on a $S_{p+1} = 4$; $S_{p+2} = 2$; $S_{p+3} = 1$ etc…
Cette conjecture n'a jamais été démontrée, mais on n'a jamais non plus trouvé de contre-exemple…

1) a. Montrer que la conjecture est vraie pour $S_0 = 8$

b. Montrer que la conjecture est vraie pour $S_0 = 17$

2) a. Démontrer que s'il existe un entier naturel non nul p tel que S_p est un multiple de 3, alors S_{p-1} est aussi un multiple de 3

b. En déduire que S_{p-1} est pair, puis que $S_0 = 2^p S_p$

Exercice 4 : Petites démonstrations autour des diviseurs

1) a) Le produit de 2 nombres entiers consécutifs est-il toujours divisible par 2 ?

b) Est-il toujours vrai que 3 divise la somme de trois nombres entiers consécutifs ?

c) Est-il vrai que le nombre de diviseurs d'un entier dans $\mathbb{Z}$ est toujours pair ? et dans $\mathbb{N}$?

d) Les entiers n et n^2 ont-ils toujours la même parité ?

2) a) Existe-t-il un entier n qui soit à la fois multiple de 14 et diviseur de 100 ?

b) Montrer que si n est un entier pair, alors 8 divise l'entier $n(n^2 + 20)$

c) Soit n un entier. Démontrer que $n^2 + 3n + 2$ est divisible par $n + 2$

3) Les propositions suivantes sont-elles vraies ? Justifier par une démonstration ou un contre-exemple.

a) « Si le carré de l'entier a divise l'entier n alors a divise $\sqrt{n}$ »

b) « Si l'entier a divise l'entier b et divise l'entier c alors a^2 divise le produit bc »

c) « Si 2 divise $a^2 + b^2$ alors $(a + b)^2$ est pair »

d) « Soit a et b des entiers. S'il existe des entiers m et n tels que d divise $ma + nb$, alors d divise a ou d divise b »

4) a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, le nombre $5^{2n} + 3$ est divisible par 4

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, 6 divise $5n^3 + n$

Exercice 5 : Division euclidienne

1) Effectuer la division euclidienne de a par b en précisant les quotients et les restes :

a) $a = 31$ et $b = 9$ **b)** $a = 42$ et $b = -8$ **c)** $a = 15$ et $b = -3$

d) $a = 17$ et $b = -12$ **e)** $a = 59$ et $b = 7$ **f)** $a = -59$ et $b = 7$

g) $a = 18$ et $b = 25$ **h)** $a = 271$ et $b = 19$ **i)** $a = 332$ et $b = 27$

2) On sait que $496 = 13 \times 36 + 28$. Déterminer (sans calculatrice) les divisions euclidiennes :

a) 496 par 13 b) 496 par 36 c) 496 par 18 d) 496 par 12 e) 496 par 6

Exercice 6 : Pour chercher

a) La différence de deux entiers naturels est 116.
Si l'on divise l'un par l'autre, le quotient est 4 et le reste est 8. Quels sont ces deux nombres ?

b) Un nombre entier a pour reste 35 dans la division par 69.
Il a le même quotient dans la division par 75 et pour reste 17… quel est ce nombre ?

c) On divise un entier naturel n par 152 puis par 147. Les quotients des deux divisions sont égaux, et les restes respectifs sont 13 et 98. Déterminer n.

d) Le reste de la division de 225 par un entier naturel b est 4. Déterminer les valeurs possibles de b.

e) Déterminer les entiers naturels n qui, dans la division euclidienne par 4, ont un quotient égal à deux fois le reste.

Exercice 7 : Division de polynômes

Effectuer les divisions de polynômes suivantes :

a) $6n^2 + n - 8$ par $2n + 3$ **b)** $3n^2 - 4n - 10 =$ par $n - 3$