Savoirs FL. 5 : Généralisation du TVi

Exercice 18 : Application du Tvi sur un intervalle non borné

On donne les tableaux de variation suivants :

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
$f(x)$	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$g(x)$	0	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

1) a) Déterminer les images par f des intervalles suivants : $I_1 =]-\infty; -3[$; $I_2 =]-3; 4]$ et $I_3 =]-3; +\infty[$

b) Déterminer les images par g des intervalles suivants : $J_1 =]-\infty; -2[$; $J_2 = [0; +\infty[$ et $J_3 =]-\infty; +\infty[$

2) a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

b) Déterminer le nombre de solutions dans $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ de l'équation $f(x) = \frac{5}{2}$

c) Démontrer que l'équation $g(x) = -e$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$

d) Déterminer le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $g(x) = 1$

Exercice 19 : Étude de fonctions

1) a . Étudier le sens de variation et les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + x + 1$$

b. En déduire le nombre de solution de l'équation $x^3 + x = -1$ et donner une valeur approchée à 10^{-2} près

2) Montrer que l'équation $x - e^x + 2 = -1$ admet exactement deux solutions.

On admet pour l'exercice que $\lim\limits_{x \to +\infty} x - e^x = -\infty$

3) On considère la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = \ln x + x^2$

a. Déterminer les limites de h aux bornes de son ensemble de définition.

b. Dresser le tableau de variation complet de h

c. Montrer que $h(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0; +\infty[$ qu'on notera α

d. Montrer que $\alpha e^{\alpha^2} = 1$