Savoir FL. 3 : Composées et croissances comparées

Entraînement exponentielles

1) $f(x) = 2e^{-x}$ $\quad g(x) = e^{x^2} - 1$ $\quad h(m) = \dfrac{5m}{2} e^{\frac{m}{2}}$ $\quad \psi(x) = 3e^{\frac{2}{x}}$ $\quad \mathcal{A}(t) = \dfrac{e^{-t} - e^{t}}{2}$

a. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et e, $+\infty$

b. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$

c. Déterminer la limite de la fonction h quand m tend vers $+\infty$

d. Déterminer la limite de ψ en 0^-

e. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathcal{A}(t)$

2) $F(x) = 2xe^{-x}$ $\quad G(x) = \dfrac{e^{x} - 1}{x}$ $\quad H(t) = (5 - t)e^{-t}$ $\quad T(x) = \dfrac{1}{x}(1 - e^{-2x})$

a. Déterminer la limite de F en $+\infty$

b. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x)$

c. Déterminer la limite de la fonction h quand t tend vers $+\infty$

d. Montrer que, pour tout $x \neq 0$, on a $T(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{2xe^{2x}}$ et en déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} T(x)$

Entraînement logarithme

1) $f(x) = \ln(4 - x)$ $\quad g(x) = 2\ln(x^2 + 1)$ $\quad h(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $\quad \psi(x) = \dfrac{1}{\ln x - 1}$ $\quad \mathcal{A}(t) = \left(\dfrac{\ln t}{2}\right)^2$

a. Déterminer la limite de f en 4

b. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$

c. Déterminer la limite de la fonction h quand x tend vers 0^+

d. Déterminer les limites de ψ en e

e. Déterminer $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \mathcal{A}(t)$

2) $F(x) = \dfrac{2x}{\ln x}$ $\quad G(x) = \dfrac{x}{2}\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$ $\quad H(t) = (t - 1)\ln(1 - t)$ $\quad T(x) = \dfrac{1}{2}\ln x - 2x + 1$

a. Déterminer la limite de F en $+\infty$

b. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} G(x)$

c. Déterminer la limite de la fonction h quand t tend vers 1, avec $t < 1$

d. Justifier que, pour tout $x > 0$, $T(x) = \frac{x}{2}\left(\frac{\ln x}{x} - 4 + \frac{2}{x}\right)$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} T(x)$

Entraînement autres fonctions

$f(x) = \sqrt{3 + \dfrac{1}{x}}$ $\quad g(x) = \left(\dfrac{2}{x} - 1\right)^2$ $\quad h(x) = (3 - x)^3$ $\quad \psi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{x - 2}}$

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$

b. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x)$

c. Déterminer la limite de la fonction h quand x tend vers $+\infty$

d. Déterminer $\lim\limits_{t \to 2^+} \psi(t)$

Extrait bac 1

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la limite en 0 de la fonction f et interpréter graphiquement le résultat.

2. a. Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$,

$$f(x) = 4\left(\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2$$

b. En déduire que l'axe des abscisses est une asymptote à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$.

Extrait bac 2

Pour tout réel m, on note f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_m(x) = (x+m)e^{-x}$

Calculer les limites de f_m en $-\infty$ et $+\infty$.

Extrait bac 3

Paul, étudiant de 19 ans de corpulence moyenne et jeune conducteur, boit deux verres de rhum. La concentration C d'alcool dans son sang est modélisée en fonction du temps t , exprimé en heure, par la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(t) = 2te^{-t}$

Rappeler la limite de $\frac{e^t}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$ et en déduire celle de $f(t)$ en $+\infty$. Interpréter le résultat.

Extrait bac 4

On s'intéresse à la chute d'une goutte d'eau qui se détache d'un nuage sans vitesse initiale. Un modèle très simplifié permet d'établir que la vitesse instantanée verticale, exprimée en m.s^{-1}, de chute de la goutte en fonction de la durée de chute t est donnée par la fonction v définie ainsi :

Pour tout réel positif ou nul t , $v(t) = 9{,}81\frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$; la constante m est la masse de la goutte en milligramme et la constante k est un coefficient strictement positif lié au frottement de l'air.

Montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 9{,}81\frac{m}{k}$ Cette limite s'appelle vitesse limite de la goutte.

Extrait bac 5

On considère la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = xe^{1-x^2}$

Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Indication : on pourra utiliser que pour tout réel x différent de 0, $f(x) = \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$

Extrait bac 6

Pour un réel a strictement positif, on considère la fonction h_a définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$h_a(x) = \ln x - ax^2.$$

Rappeler la limite de $\dfrac{\ln x}{x}$ en $+\infty$. En déduire la limite de la fonction h_a en $+\infty$.

Extrait bac 7

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = x - 5\ln x - \dfrac{4}{x}$

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.
On pourra utiliser sans démonstration le fait que $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$

2. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Extrait bac 8

Soit la fonction f définie et dérivable sur $[1\ ;\ +\infty[$ telle que, pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1,

$$f(x) = \frac{1}{x}\ln(x).$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale.

Corrections Savoir FL. 3

Corrigé Entraînement exponentielles

1) a. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty \\ \lim\limits_{Y\to+\infty} 2e^Y = +\infty \end{cases}$ donc par composée de limites, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} \boldsymbol{f(x)} = +\infty$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty \\ \lim\limits_{Y\to-\infty} 2e^Y = 0 \end{cases}$ donc par composée de limites, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{f(x) = 0}$

b. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{Y\to+\infty} e^Y - 1 = +\infty \end{cases}$ donc par composée de limites, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} \boldsymbol{g(x)} = +\infty$

c. $\begin{cases} \lim\limits_{m\to+\infty} \frac{m}{2} = +\infty \\ \lim\limits_{Y\to+\infty} 5Ye^Y = +\infty \end{cases}$ donc par composée de limites, on a $\lim\limits_{m\to+\infty} \boldsymbol{h(m)} = +\infty$

d. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to0^-} \frac{2}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{Y\to-\infty} 3e^Y = 0 \end{cases}$ donc par composée de limites, on a $\lim\limits_{x\to0^-} \boldsymbol{\psi(x) = 0}$

e. $\begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty} -t = -\infty \\ \lim\limits_{Y\to-\infty} e^Y = 0 \end{cases}$ donc par composée de limites, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$

De plus $\lim\limits_{t\to+\infty} -e^t = -\infty$ donc, par somme de limite $\lim\limits_{t\to+\infty} \boldsymbol{\mathcal{A}(t)} = -\infty$

2) a. <u>Méthode 1</u> : On a $F(x) = \frac{2x}{e^x} = 2 \times \frac{1}{\frac{e^x}{x}}$ or, d'après les croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Donc, par inverse de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{F(x) = 0}$

<u>Méthode 2 :</u> On a $F(x) = -2(-xe^{-x})$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} -2(-xe^{-x}) = \lim\limits_{Y\to-\infty} -2(Ye^Y)$

or, d'après les croissances comparées, $\lim\limits_{Y\to-\infty} Ye^Y = 0$ on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{F(x) = 0}$

b. $G(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}$ Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et, d'après les croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

On a donc, par sommes de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{G(x)} = +\infty$

c. $H(t) = 5e^{-t} - te^{-t}$ Donc, par composée de limites, $\lim\limits_{t\to+\infty} 5e^{-t} - te^{-t} = \lim\limits_{Y\to-\infty} 5e^Y + Ye^Y$

Or $\lim\limits_{Y\to-\infty} 5e^Y = 0$ et par croissance comparées, $\lim\limits_{Y\to-\infty} Ye^Y = 0$

Donc, par somme de limites $\lim\limits_{t\to+\infty} \boldsymbol{H(t) = 0}$

d. $T(x) = \frac{1}{x}(1 - e^{-2x}) = \frac{1}{x} - \frac{e^{-2x}}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{xe^{2x}} = \frac{1}{x} - \frac{2}{2xe^{2x}}$ CQFD

Donc, par composée de limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^{2x} = \lim\limits_{Y\to-\infty} Ye^Y = 0^-$ donc, par inverse, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{2xe^{2x}} = -\infty$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ on a alors, par somme de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} \boldsymbol{T(x)} = -\infty$

Corrigé Entraînement logarithme

1)a. $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 4^-} 4 - x = 0^+ \\ \lim\limits_{Y \to 0^+} \ln Y = -\infty \end{cases}$ donc par composée de limites, on a $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$

b. $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 + 1 = +\infty \\ \lim\limits_{Y \to +\infty} \ln Y = +\infty \end{cases}$ donc par composée de limites, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

c. $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{Y \to +\infty} \ln Y = +\infty \end{cases}$ donc par composée de limites, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = +\infty$

d. $\begin{cases} \lim\limits_{x \to e^-} \ln x - 1 = 0^- \\ \lim\limits_{Y \to 0^-} \frac{1}{Y} = -\infty \end{cases}$ donc par composée de limites, on a $\lim\limits_{x \to e^-} \psi(x) = -\infty$

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to e^+} \ln x - 1 = 0^+ \\ \lim\limits_{Y \to 0^+} \frac{1}{Y} = +\infty \end{cases}$ donc par composée de limites, on a $\lim\limits_{x \to e^+} \psi(x) = +\infty$

e. $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{\ln t}{2} = -\infty \\ \lim\limits_{Y \to -\infty} Y^2 = +\infty \end{cases}$ donc par composée de limites, on a $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \mathcal{A}(t) = +\infty$

2) a. $F(x) = 2 \times \frac{x}{\ln x} = 2 \times \frac{1}{\frac{\ln x}{x}}$

or, d'après les croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$ on a donc, par inverse de limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

b. On a, par composée de limites, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) = \lim\limits_{Y \to 0^+} Y \ln Y$

Or, d'après les croissances comparées $\lim\limits_{Y \to 0^+} Y \ln Y = 0$ et on a $\lim\limits_{x \to 0^+} G(x) = 0$

c. $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{t \to 1 \\ t < 1}} 1 - t = 0^+ \\ \lim\limits_{Y \to 0^+} Y \ln Y = 0 \quad \text{d'après les croissances comparées} \end{cases}$ donc par composée de limites, $\lim\limits_{\substack{t \to 1 \\ t < 1}} h(t) = 0$

d. On a $\frac{x}{2}\left(\frac{\ln x}{x} - 4 + \frac{2}{x}\right) = \frac{x \ln x}{2x} - \frac{4x}{2} + \frac{2x}{2x} = \frac{1}{2} \ln x - 2x + 1 = T(x)$ CQFD

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{(croissances comparées)} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} -4 + \frac{2}{x} = -4 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty \end{cases}$ Donc par somme et produit de limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} T(x) = -\infty$

Corrigé Entraînement autres fonctions

a. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 3+\frac{1}{x} = 3 \\ \lim\limits_{Y\to 3} \sqrt{Y} = \sqrt{3} \end{cases}$ donc par composée de limites, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{\sqrt{3}}$

b. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{2}{x} - 1 = -\infty \\ \lim\limits_{Y\to-\infty} Y^2 = +\infty \end{cases}$ donc par composée de limites, on a $\lim\limits_{x\to 0^-} \boldsymbol{g(x)} = +\infty$

c. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 3 - x = -\infty \\ \lim\limits_{Y\to-\infty} Y^3 = -\infty \end{cases}$ donc par composée de limites, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{h(x)} = -\infty$

d. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} x - 2 = 0^+ \\ \lim\limits_{Y\to 0^+} \sqrt{Y} = 0^+ \end{cases}$ donc par composée de limites, on a $\lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt{x-2} = 0^+$

donc, par inverse de limites $\lim\limits_{t\to 2^+} \boldsymbol{\psi(t)} = +\infty$

Corrigé Extrait bac 1

1. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{Y\to-\infty} Y^2 = +\infty \end{cases}$ donc par composée de limites, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} (\ln x)^2 = +\infty$

De plus $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ donc, par produit de limites, $\lim\limits_{x\to 0^+} \boldsymbol{f(x)} = +\infty$

La droite $\boldsymbol{x = 0}$ (soit l'axe des ordonnées) est une **asymptote verticale à $\boldsymbol{C}$**

2. a. $4\left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2 = 4\frac{\left(\frac{1}{2}\ln x\right)^2}{x} = 4 \times \frac{\frac{1}{4}(\ln x)^2}{x} = \frac{(\ln x)^2}{x} = f(x)$ CQFD

b. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty \\ \lim\limits_{Y\to+\infty} \frac{\ln Y}{Y} = 0 \quad \text{(croissances comparées)} \end{cases}$ donc, par composée de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 0$

On a alors, par composée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{f(x)} = 4 \times 0^2 = \boldsymbol{0}$

La droite $\boldsymbol{y = 0}$ (soit l'axe des abscisses) est bien une **asymptote horizontale à $\boldsymbol{C}$ en** $+\infty$

Corrigé Extrait bac 2

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty \\ \lim\limits_{Y\to+\infty} e^Y = +\infty \end{cases}$ donc par composée de limites, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} x + m = -\infty$, on a par produit de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} \boldsymbol{f_m(x)} = -\infty$

$f_m(x) = \frac{x+m}{e^x} = \frac{x}{e^x} + \frac{m}{e^x}$ Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, on a par inverse de limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{m}{e^x} = 0$

De plus, par croissances comparées, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc, par inverse $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

Donc, par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{f_m(x)} = \boldsymbol{0}$

Corrigé Extrait bac 3

On sait, d'après les croissances comparées, que $\lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$

Donc, comme $f(t) = \frac{2t}{e^t} = \frac{2}{\frac{e^t}{t}}$, on a par passage à l'inverse $\boldsymbol{\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0}$

Au bout d'un très long temps, ma concentration d'alcool dans son sang va devenir presque nulle

Corrigé Extrait bac 4

$\begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty} -\frac{k}{m}\, t = -\infty \\ \lim\limits_{Y\to-\infty} e^Y = 0 \end{cases}$ donc, par composées de limites, on a $\lim_{t\to+\infty} e^{-\frac{k}{m}t} = 0$

Et donc, par somme et multiple, on obtient bien $\boldsymbol{\lim_{t\to+\infty} v(t)} = 9{,}81\frac{m}{k}(1-0) = \boldsymbol{9{,}81\frac{m}{k}}$

Corrigé Extrait bac 5

On a $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{Y\to+\infty} \frac{e^Y}{Y} = +\infty \text{ (croissances comparées)} \end{cases}$ donc, par composées de limites, on a $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2} = +\infty$

On a donc, par passage à l'inverse, $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0}$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{e}{x} = 0$ on a , par produit de limites, $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

Corrigé Extrait bac 6

On a $h_a(x) = \ln x - ax^2 = x\left(\frac{\ln x}{x} - ax\right)$. On sait, d'après les croissances comparées, que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$

Donc $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} - ax = -\infty \quad \text{car } a > 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \end{cases}$ donc par produit de limites, on a $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} h_a(x) = -\infty}$

Corrigé Extrait bac 7

1. $f(x) = x - 5\ln x - \frac{4}{x} = x - \frac{5x\ln x + 4}{x}$

On a $\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$ donc $\lim_{x\to 0^+} 5x\ln x + 4 = 4$ et par quotient de limites, $\lim_{x\to 0^+} \frac{5x\ln x+4}{x} = +\infty$

On a alors, par somme de limites, $\boldsymbol{\lim_{x\to 0^+} f(x)} = \lim_{x\to 0^+} x - \frac{5x\ln x+4}{x} = -\infty$

2. $f(x) = x - 5\ln x - \frac{4}{x} = x\left(1 - \frac{5\ln x}{x} - \frac{4}{x^2}\right)$

Or, on sait par croissance comparée que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ on a donc, par somme, $\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{5\ln x}{x} - \frac{4}{x^2} = 1$

Et par produit de limites, $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} f(x)} = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{5\ln x}{x} - \frac{4}{x^2}\right) = +\infty$

Corrigé Extrait bac 8

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissances comparées.

La droite d'équation $y = 0$, soit l'axe des abscisses, est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $+\infty$