Corrections Savoir SL. 3

Corrigé Exercice 6

1) a. $u_1 = 13, u_2 = 73 \quad et \quad u_3 = 373$
puis $v_0 = 3$, $v_1 = 15$, $v_2 = 75 \ et \ v_3 = 375$

b. $\boldsymbol{v_{n+1}} = u_{n+1} + 2 = (5u_n + 8) + 2$
$= 5(v_n - 2) + 10 = 5v_n + 10 - 10$
$= \boldsymbol{5v_n}$
La suite (v_n) est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $v_0 = 3$

c. $v_n = 3 \times 5^n$

d. $u_n = v_n - 2$ donc $\boldsymbol{u_n = 3 \times 5^n - 2}$

2) a. on a $u_n = v_n + 25$
Et $\boldsymbol{v_{n+1}} = u_{n+1} - 25 = (1{,}6u_n - 15) - 25$
$= 1{,}6(v_n + 25) - 40 = 1{,}6v_n + 40 - 40$
$= \boldsymbol{1{,}6v_n}$
la suite (v_n) est géométrique, de raison 1,6 et de premier terme $v_0 = u_0 - 25 = 800 - 25 = 775$

b. on a alors : $v_n = 775 \times 1{,}6^n$, et par conséquent
$u_n = v_n + 25$ donc $\boldsymbol{u_n = 775 \times 1{,}6^n + 25}$.

Un peu plus…

4) a. $u_1 = 0{,}9 \times 110 + 3 = 129$
$\Rightarrow$ **129 exposants sont attendus pour 2013**

b. Si chaque année 90% des exposants se réinscrivent, **cela revient à multiplier le nombre d'inscrits de l'année précédente par 0,9** (soit $0{,}9u_n$). Comme de plus on ajoute 30 nouveaux inscrits chaque année, on a bien : $\boldsymbol{u_{n+1} = 0{,}9u_n + 30}$.

c. $v_n = u_n - 300$ donc $\boldsymbol{u_n = v_n + 300}$

$\boldsymbol{v_{n+1}} = u_{n+1} - 300$
$= (0{,}9u_n + 30) - 300$
$= 0{,}9(v_n + 300) - 270$
$= 0{,}9v_n + 270 - 270$
$= \boldsymbol{0{,}9v_n}$
La suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9.
Son premier terme est :
$v_0 = u_0 - 300 = \boldsymbol{-190}$

d. On a $v_n = v_0 \times q^n = -190 \times 0{,}9^n$
Et $u_n = v_n + 300$
$u_n = \boldsymbol{-190 \times 0{,}9^n + 300}$

3) a. $u_0 = \boldsymbol{6}$; $u_1 = \frac{1}{2} \times 6 + 1 = \boldsymbol{4} \ et \ u_2 = \boldsymbol{3}$ et $v_0 = 6 - 2 = \boldsymbol{4}$; $v_1 = \boldsymbol{2} \ et \ v_2 = \boldsymbol{1}$

b. $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}u_n + 1 - 2 = \frac{1}{2}(v_n + 2) - 1 = \frac{1}{2}v_n + 1 - 1 = \frac{1}{2}v_n$
La suite *v* est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 4$

c. $v_n = v_0 \times q^n = \boldsymbol{4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}$ **d.** $u_n = v_n + 2 = \boldsymbol{4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2}$

Corrigé Exercice 7

1) a. $u_0 = -1$; $u_1 = \frac{-1}{-2+1} = 1$; $u_2 = \frac{1}{3}$ et $v_0 = -1$; $v_1 = 1 \ et \ v_2 = 3$

b. $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{2u_n+1}{u_n} = \frac{2\left(\frac{1}{v_n}\right)+1}{\frac{1}{v_n}} = \frac{\frac{2+v_n}{v_n}}{\frac{1}{v_n}} = \boldsymbol{2 + v_n}$
La suite *v* est **arithmétique** de raison 2 et de premier terme $v_0 = -1$

c. $v_n = v_0 + nR = \boldsymbol{-1 + 2n}$ **d.** $u_n = \frac{1}{v_n} = \boldsymbol{\frac{1}{2n-1}}$

2) a. $b_{n+1} = a_{n+1} - (n+1) = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1 = \frac{2}{3}a_n - \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}(a_n - n) = \frac{2}{3}b_n$
(b_n) est bien une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $b_1 = a_1 - 1 = 2 - 1 = 1$

b. $a_n = b_n + n = b_1 \times q^{n-1} + n = 1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + n = \boldsymbol{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + n}$

Un peu plus…

3) a. $u_1=\frac{u_0+v_0}{2}=\frac{3+4}{2}=\mathbf{\frac{7}{2}}$; $v_1=\frac{u_1+v_0}{2}=\frac{\frac{7}{2}+4}{2}=\mathbf{\frac{15}{4}}$; $u_2=\mathbf{\frac{29}{8}}$ et $v_2=\mathbf{\frac{59}{16}}$

b. $a_{n+1}=v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{u_{n+1}+v_n}{2}-\frac{u_n+v_n}{2}=\frac{u_{n+1}-u_n}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{u_n+v_n}{2}-u_n\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{v_n-u_n}{2}\right)=\frac{1}{4}(v_n-u_n)=\frac{1}{4}a_n$

(a_n) est bien une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de 1er terme $a_0=v_0-u_0=1$ $b_0=\frac{u_0+2v_0}{3}=\frac{11}{3}$

$b_{n+1}=\frac{1}{3}(u_{n+1}+2v_{n+1})=\frac{1}{3}\left(\frac{u_n+v_n}{2}+2\times\frac{u_{n+1}+v_n}{2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{u_n+v_n}{2}+\frac{u_n+v_n}{2}+v_n\right)=\frac{1}{3}(u_n+2v_n)=b_n$

(b_n) est bien une suite stationnaire égale à son premier terme $b_0=\frac{u_0+2v_0}{3}=\frac{11}{3}$

c. $a_n=a_0\times q^n=1\times\left(\frac{1}{4}\right)^n=\mathbf{\frac{1}{4^n}}$ **et** $b_n=\mathbf{\frac{11}{3}}$

d. On cherche à résoudre le système $\begin{cases}a_n=v_n-u_n\\ b_n=\frac{u_n+2v_n}{3}\end{cases}$ pour trouver u_n et v_n en fonction de a_n et de b_n

$$\begin{cases}\frac{1}{4^n}=v_n-u_n\\ \frac{11}{3}=\frac{u_n+2v_n}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_n=v_n-\frac{1}{4^n}\\ 11=\left(v_n-\frac{1}{4^n}\right)+2v_n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_n=v_n-\frac{1}{4^n}\\ 3v_n=11+\frac{1}{4^n}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_n=\frac{11}{3}+\frac{1}{3\times4^n}-\frac{1}{4^n}\\ v_n=\frac{11}{3}+\frac{1}{3\times4^n}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\boldsymbol{u_n}=\mathbf{\frac{11}{3}-\frac{2}{3\times4^n}}\\ \boldsymbol{v_n}=\mathbf{\frac{11}{3}+\frac{1}{3\times4^n}}\end{cases}$$