Fle. 1 - Propriétés de l'exponentielle

Propriétés : **(1)** Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, on a : $\boldsymbol{e^{x+y} = e^x \times e^y}$

(2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, on a : $\boldsymbol{e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}}$

(3) Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a : $\boldsymbol{e^{-y} = \frac{1}{e^y}}$

(4) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a : $\boldsymbol{(e^x)^n = e^{nx}}$

Démonstrations

(1) On pose $k_y(x) = \exp(x+y) \times \exp(-x)$ fonction de la variable x pour un y donné.
On dérive $k'_y(x) = \exp'(x+y) \times \exp(-x) - \exp(x+y) \times \exp'(-x)$
$= \exp(x+y) \times \exp(-x) - \exp(x+y) \times \exp(-x)$
$= 0$
Donc pour un y donné, k_y est constante et on a $k_y(0) = \exp(0+y) \times \exp(0) = \exp(y)$
Par conséquent : $\exp(y) = \exp(x+y) \times \exp(-x)$
Or on sait que $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ donc $\exp(y) = \exp(x+y) \times \frac{1}{\exp(x)} \Leftrightarrow \mathbf{exp}(\boldsymbol{x}) \times \mathbf{exp}(\boldsymbol{y}) = \mathbf{exp}(\boldsymbol{x+y})$

(2) $\exp(x-y) = \exp\big(x+(-y)\big) = \exp(x) \times \exp(-y) = \exp(x) \times \frac{1}{\exp(y)} = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$

(4) Raisonnement par récurrence

<u>Initialisation</u> : pour $n = 0$, on a $(\exp(x))^0 = 1$ et $\exp(0 \times x) = \exp(0) = 1$. **La ppté est vraie au rang 0**

<u>Hyp. de réc</u>. : On suppose qu'il existe un entier naturel p tel que $(\exp(x))^p = \exp(px)$

<u>Hérédité</u> : $(\exp(x))^{p+1} = (\exp(x))^p \times \exp(x) = \exp(px) \times \exp(x)$ par hypothèse de récurrence
$= \exp(px+x) = \exp\big((p+1)x\big)$
La propriété est vraie au rang $\boldsymbol{p+1}$

<u>Ccl</u>. : Pour tout entier naturel n, on a $(\mathbf{exp}(\boldsymbol{x}))^{\boldsymbol{n}} = \mathbf{exp}(\boldsymbol{nx})$