Savoir Nc. 2 – Complexes et conjugués

Propriétés :

- ▶ $z \times \bar{z} = x^2 + y^2$
- ▶ $\frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2}$

Démonstrations : ▶ $z \times \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2$

▶ $\frac{1}{x+iy} = \frac{1(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2}$

Méthode : Pour obtenir la forme algébrique d'un quotient de complexes (pour faire « disparaître » les i du dénominateur), il faut **multiplier** numérateur et dénominateur **par le conjugué du dénominateur**

Conjugués

Propriétés :

- ▶ $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- ▶ $\overline{z_1 \times z_2} = \bar{z}_1 \times \bar{z}_2$
- ▶ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$
- ▶ $\overline{z^n} = \bar{z}^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

Démonstrations

▶ $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2))} = x_1 + x_2 - i(y_1 + y_2) = x_1 - iy_1 + x_2 - iy_2 = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

▶ $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)} = \overline{x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)} = x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2 + x_2y_1)$

et $\bar{z}_1 \times \bar{z}_2 = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = x_1x_2 - ix_1y_2 - ix_2y_1 + i^2y_1y_2 = x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2 + x_2y_1)$
CQFD

▶ Démonstration par récurrence... Initialisation : Pour $n = 1$ évident

Hypothèse de récurrence : $\exists p \in \mathbb{N}^*, \overline{z^p} = \bar{z}^p$

Hérédité : $\overline{z^{p+1}} = \overline{z^p \times z} = \overline{z^p} \times \bar{z}$ produit des conjugués

Donc, d'après l'HR : $\overline{z^{p+1}} = \overline{z^p} \times \bar{z} = \bar{z}^p \times \bar{z} = \bar{z}^{p+1}$

Vraie pour $p + 1$

Conclusion : $\overline{z^n} = \bar{z}^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

Caractérisation

Propriétés : Caractérisation des réels

▶ $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$

▶ $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$

Caractérisation des imaginaires purs

▶ $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$

▶ $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$