CORRECTIONS Sujets 2022

CORRECTIONS Polynésie - 1 - Mai 2022

Corrigé Exercice 1

1. On a $g'(x) = \frac{u'}{u} = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$. **REPONSE d**

2. On a $(x\ln x - x)' = 1\ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$. **REPONSE c**

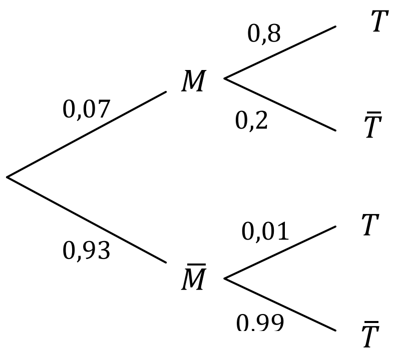
3. On a $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \times \frac{\frac{1}{3^n}-1}{\frac{1}{2^n}+1}$. Or $\frac{3}{2} > 1$ donc $\left(\frac{3}{2}\right)^n \to +\infty$ et $\frac{\frac{1}{3^n}-1}{\frac{1}{2^n}+1} \to \frac{0-1}{0+1} = -1$ donc $a_n \to -\infty$ **REPONSE a**

4. Sur $[-2;0]$, f' est décroissante donc $f'' < 0$ et f est concave. **REPONSE d**

5. Sur $[0;2]$, f' est positive jusqu'à $x = 1$ puis devient négative, donc f est croissante jusqu'à $x = 1$ puis devient décroissante. Elle admet donc un maximum en $x = 1$. **REPONSE c**

6. L'algorithme doit calculer la variable **v** tant qu'elle est en dessous de 200 (**while v < 200**). **REPONSE a**

Corrigé Exercice 2



1. Voir l'arbre ci-contre.
   On a : $p(M \cap T) = p(M) \times p_M(T) = 0{,}07 \times 0{,}8 = 0{,}056$.

2. On a :
   $p(T) = p(M \cap T) + p(\bar{M} \cap T) = 0{,}056 + 0{,}93 \times 0{,}01 = 0{,}0653$.
   La probabilité que le test de la personne choisie au hasard soit positif est donc bien égale à 0,0653.

3. Tout dépend de quel point de vue on se place (question très mal posée et pas du tout mathématique).
   Dans le cas d'un individu qui se retrouve avec un test positif, l'individu peut avoir envie de savoir quelle est la probabilité qu'il soit vraiment malade ($p_T(M)$). C'est la réponse que semble attendre l'énoncé.
   Mais dans le cadre collectif, les épidémiologistes aux notions plus importantes de $p_M(T)$ (qui s'appelle la sensibilité du test) et de $p_{\bar{M}}(\bar{T})$ (qui s'appelle la spécificité du test).
   Car quand on obtient un test positif, même s'il y a une probabilité qu'en fait on ne soit pas malade, on doit agir comme si on était malade à coup sûr, pour protéger les autres.

4. On cherche: $p_T(M) = \frac{p(M\cap T)}{p(T)} = \frac{0{,}056}{0{,}0653} \simeq 0{,}86$.

5. **a.** Il y a une répétition de 10 tirages avec la même probabilité (0,0653) à chaque tirage d'obtenir un individu ayant un test positif. X étant justement le nombre d'individus ayant un test positif, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}0653$.

   b. On a : $p(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0{,}0653^2 \times 0{,}9347^8 \simeq 0{,}11$.
   Il y a donc environ 11% de chances pour qu'exactement deux personnes aient un test positif.

6. Soit la variable aléatoire Y qui compte le nombre de personnes positives parmi n personnes. Y suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}0653$.
On cherche n tel que $p(Y \geq 1) \geq 0{,}99$
$\Leftrightarrow \quad 1 - p(Y = 0) \geq 0{,}99 \;\Leftrightarrow\; p(Y = 0) \leq 1 - 0{,}99 \;\Leftrightarrow\; p(Y = 0) \leq 0{,}01.$
Or $p(Y = 0) = 0{,}9347^n$.
On cherche donc à résoudre $0{,}9347^n \leq 0{,}01$.
$\Leftrightarrow \ln(0{,}9347^n) \leq \ln 0{,}01 \;\Leftrightarrow\; n \ln(0{,}9347) \leq \ln 0{,}01 \;\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}9347}$ car $\ln 0{,}9347 < 0$.
or on a $\frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}9347} \simeq 68{,}2$ On en déduit dont $n \geq 69$.
Il faudra tester au moins 69 personnes pour avoir plus de 99 % de chances d'avoir au moins une personne positive.

Corrigé Exercice 3

1. a. $u_1 = \frac{1}{2}$. $\quad u_2 = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$. $\quad u_3 = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$.

b. Il faut compléter en ligne 3 : $u = 1$ et en ligne 6 : $u = u/(1+u)$.

2. On calcule par exemple : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{1+u_n} - u_n = \frac{u_n - u_n(1+u_n)}{1+u_n} = \frac{-u_n^2}{1+u_n}$. Puisque $u_n \geq 0$, on a $1 + u_n > 0$ et $-u_n^2 \leq 0$ donc $u_{n+1} - u_n$est négatif et la suite (u_n) est décroissante.
Il n'était pas trop possible de le montrer par récurrence.

3. La suite est positive donc minorée. Puisqu'elle est décroissante, d'après le théorème des suites monotones bornées, la suite (u_n) est donc convergente.

4. Soit l la limite de (u_n). Puisque la suite est positive, on sait que $l \geq 0$.
Par passage à la limite on a d'autre part : $l = \frac{l}{1+l} \Leftrightarrow \frac{l(l+1)}{1+l} - \frac{l}{1+l} = 0 \Leftrightarrow l^2 = 0 \Leftrightarrow l = 0$.
On a donc :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

5. a. D'après la question 1.a, il semblerait que :

$$u_n = \frac{1}{n+1}$$

b. Initialisation : $u_0 = 1$ et $\frac{1}{0+1} = 1$. Donc $u_n = \frac{1}{n+1}$ est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : Si on $u_p = \frac{1}{p+1}$ alors

$$u_{p+1} = \frac{u_p}{1+u_p} = \frac{\frac{1}{p+1}}{1+\frac{1}{p+1}} = \frac{1}{(p+1)+1}$$

Donc $u_n = \frac{1}{n+1}$ est vraie pour $n = p + 1$.
Conclusion : On a $u_n = \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé Exercice 4

1. a. On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\7\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-4+7-3=0$. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc orthogonaux, donc ABC est rectangle en A.

b. On a $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}5\\6\\4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=5-6+12=11$.
On a d'autre part : $BA=\sqrt{1+1+9}=\sqrt{11}$ et $BC=\sqrt{25+36+16}=\sqrt{77}$.

c. On a $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=BA\times BC\times\cos\widehat{ABC}\Rightarrow\quad 11=\sqrt{11}\sqrt{77}\cos\widehat{ABC}\Rightarrow\cos\widehat{ABC}=\frac{1}{\sqrt{7}}$
$\Rightarrow\widehat{ABC}=\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{7}}\simeq 68°$.

2. a. Le plan $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$.
On calcule : $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=-2-1+3=0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=8-7-1=0$. Donc $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$.
D'autre part, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ étant orthogonaux, ils forment une base du plan (ABC).
$\vec{n}$ est donc aussi normal au plan (ABC).
On a donc effectivement : $\mathcal{P}\,//\,(ABC)$.

b. (ABC) a donc une équation de la forme : $2x-y-z+d=0$.
Or $A\in(ABC)\Rightarrow d=-2x_A+y_A+z_A=-4-1+0=-5$.
Donc (ABC) a pour équation : $2x-y-z-5=0$.

c. On a $\mathcal{D}\perp(ABC)$ donc $\mathcal{D}$ a pour vecteur directeur un vecteur normal au plan (ABC), par exemple le vecteur $\vec{n}$. Cela donne :

$$\mathcal{D}:\ \begin{cases}x=1+2t\\y=2-t\\z=4-t\end{cases}\qquad t\in\mathbb{R}$$

d. Soit $M\left(4;\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$.
On calcule par exemple : $\overrightarrow{EM}\begin{pmatrix}3\\-\frac{3}{2}\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$. On a donc $\overrightarrow{EM}=-\frac{3}{2}\vec{n}$. On en déduit que $(EM)\perp(ABC)$.
D'autre part, $2x_M-y_M-z_M-5=8-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}-5=0\Rightarrow M\in(ABC)$.
M est donc le projeté orthogonal de E sur (ABC), donc M et H sont confondus.
On a donc bien $H\left(4;\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$.
• <u>2^e méthode :</u> Dire que H est le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et de (ABC) et le trouver en résolvant le système $\begin{cases}x=1+2t\\y=2-t\\z=4-t\\2x-y-z-5=0\end{cases}$

3. L'aire de ABC est donnée par $\frac{1}{2}\times AB\times AC=\frac{1}{2}\times\sqrt{1+1+9}\times\sqrt{16+49+1}=\frac{1}{2}\sqrt{11\times 66}=\frac{11\sqrt{6}}{2}$.
La hauteur correspondante est : $HE=EM=\sqrt{9+\frac{9}{4}+\frac{9}{4}}=3\sqrt{\frac{6}{4}}=3\sqrt{\frac{3}{2}}$.
On a donc $\mathcal{V}=\frac{1}{3}\times\frac{11\sqrt{6}}{2}\times 3\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{11}{2}\times\sqrt{\frac{18}{2}}=\frac{33}{2}=16{,}5$. CQFD.

Corrigé Exercice 1

1. Réponse A $\Rightarrow$ $f'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x.$

2. Réponse C $\Rightarrow$ $g(x) = x^2 - x^2 \ln(x) = x^2 - x \times \ln(x)$
Par croissance comparée $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$ donc par produit $\lim\limits_{x \to 0} x \times x \ln x = 0$
(ne pas hésiter à regarder la courbe à la calculatrice)

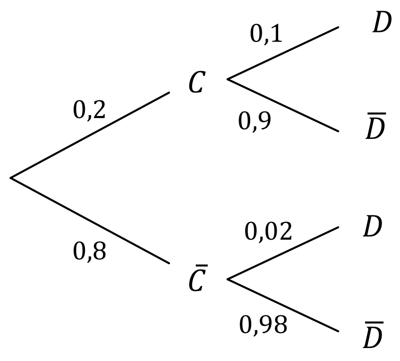
3. Réponse D $\Rightarrow$ $f(x) = x^3 - 0,9x^2 - 0,1x = x(x^2 - 0{,}9x - 0{,}1)$
donc $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ ou \ x^2 - 0{,}9x - 0{,}1 = 0$ avec $\Delta = 1{,}21 > 0$ donc 2 racines

4. Réponse C $\Rightarrow$ $K'(x) = \frac{1}{2}\big(H(2x)\big)' = \frac{1}{2} \times 2 \times H'(2x) = 1 \times h(2x) = k(x)$

5. Réponse B $\Rightarrow$ $f(x) = xe^x \Rightarrow f(1) = e$ et $f'(x) = e^x + xe^x \Rightarrow f'(1) = e + e = 2e$
Donc $y = f'(1)(x-1) + f(1) = 2e(x-1) + e = 2ex - 2e + e = 2ex - e$

6. Réponse D $\Rightarrow$ $(0,2)^n < 0,001 \Leftrightarrow \ln(0{,}2^n) < \ln 0{,}001 \Leftrightarrow n \ln 0{,}2 < \ln 0{,}001 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 0{,}001}{\ln 0{,}2}$
car $\ln 0{,}2 < 0$ et avec $\frac{\ln 0{,}001}{\ln 0{,}2} \simeq 4{,}29$ alors $n \geq 5$

Corrigé Exercice 2



Partie 1

1. $P(C \cap D) = p(C) \times p_C(D) = 0{,}2 \times 0{,}1 = \mathbf{0,02}$
Il y a 2 % de chances que le casque soit contrefait et présente un défaut.

2. $P(D) = P(C \cap D) + P(\bar{C} \cap D) = 0{,}02 + 0{,}8 \times 0{,}02 = \mathbf{0,036}$ CQFD

3. $p_D(C) = \frac{p(C \cap D)}{p(D)} = \frac{0{,}02}{0{,}036} \simeq \mathbf{0,556}$ **Il y a environ 55,6 % de chance qu'il soit contrefait.**

Partie 2

1. a. Il s'agit de la **répétition** de 35 épreuves de Bernoulli, **identiques** et **indépendantes**, de probabilité de succès de 0,036 : X suit bien une loi binomiale de paramètres $n = 35$ et $p = 0,036$.

b. $p(X = 1) = \binom{35}{1} \times 0{,}036^1 \times (1 - 0{,}036)^{35-1} = \mathbf{35 \times 0,036 \times 0,964^{34}} \simeq 0{,}362$
Il y a environ 36,2 % de chance qu'il y ait exactement 1 casque présentant un défaut.

c. $P\ (X \leq 1) = p(X = 0) + p(X = 1) = 0{,}964^{35} + 12{,}6 \times 0{,}964^{34} \simeq 0{,}639$

2. On cherche n tel que $p(X \geq 1) > 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - p(X = 0) > 0{,}99 \Leftrightarrow p(X = 0) < 0{,}01$
$\Leftrightarrow 0{,}964^n < 0{,}01 \Leftrightarrow n \ln 0{,}964 < \ln 0{,}01 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}964} \Rightarrow \boldsymbol{n \geq 126}$
Il faut commander au minimum 126 casques

Corrigé Exercice 3

1. On a $u_1 = 0{,}008 \times 40(200 - 40) = 51{,}2$.
Il devrait donc y avoir 51 oiseaux dans la colonie début 2022.

2. On a : $f(x) = x \iff 0{,}008x(200 - x) = x \iff 1{,}6x - 0{,}008x^2 = x \iff 0{,}6x - 0{,}008x^2 = 0$
$\iff x(0{,}6 - 0{,}008x) = 0$
Les solutions sont $x_1 = 0$ et $x_2 = \frac{0{,}6}{0{,}008} = 75$.

3. a. On a $f'(x) = 1{,}6 - 0{,}016x$ qui s'annule en $x_0 = \frac{1{,}6}{0{,}016} = 100$. On obtient donc :

x	0		100
$f'(x)$		+	0
$f(x)$	0	↗	80

b. <u>**Initialisation**</u> : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 40$ et $u_1 = 51{,}2$ on a donc $0 \leq 40 \leq 51{,}2 \leq 100$
La propriété est vraie pour $n = 0$

<u>**Hypothèse de récurrence**</u> **:** On suppose qu'il existe un entier naturel p quelconque pour lequel on a :
$$0 \leq u_p \leq u_{p+1} \leq 100$$

<u>**Hérédité**</u> : Comme f est croissante sur $[0; 100]$, on a alors $f(0) \leq f(u_p) \leq f(u_{p+1}) \leq f(100)$
Avec $f(0) = 0$ et $f(100) = 80$, on a donc $0 \leq u_{p+1} \leq u_{p+2} \leq 80$
Et par élargissement $0 \leq u_{p+1} \leq u_{p+2} \leq 100 \Rightarrow$ La propriété est vraie pour $n = p + 1$

<u>**Conclusion**</u> : pour tout entier naturel n, on a bien $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100$.

c. De la propriété précédente, on déduit que $u_n \leq u_{n+1}$ et donc la suite est croissante, et que $u_n \leq 100$ pour tout n, donc la suite est majorée par 100.
D'après le **théorème des suites monotones bornées**, la suite (u_n) converge vers un réel ℓ

d. Dans la question (2), on a trouvé que les solutions de l'équation $f(x) = x$ étaient 0 et 75.
Or, si on a $\ell = \lim_{n \to +\infty} u_n$ on a aussi $\ell = \lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\ell)$
Donc ℓ est solution de l'équation $f(\ell) = \ell$
On a soit $\ell = 0$, soit $\ell = 75$. Mais comme toute suite croissante est minorée par son 1er terme, on a
$u_n \geq u_0 \iff u_n \geq 40$ et par passage à la limite $\lim_{n \to +\infty} u_n \geq 40$
La seule solution est donc $\boldsymbol{\ell = 75}$

Selon ce modèle, la population d'oiseaux finirait par se stabiliser à 75 individus.

4. L'algorithme $seuil(100)$ calcule les valeurs de u_n tant que celles-ci sont en-dessous de 100.
Or (u_n) croît de 40 jusqu'à une limite de 75. Elle est donc toujours inférieure à 100.
L'algorithme tourne donc à l'infini, la boucle **while** ne s'arrête jamais et la fonction ne peut donc renvoyer aucune valeur.

Corrigé Exercice 4

Partie 1

1. On a : $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$ et $G(1; 1; 1)$.

2. On a : $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

On a ainsi : $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 0$ et $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AG} = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$ donc $\overrightarrow{BK} \perp \overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BK} \perp \overrightarrow{AG}$.

Or $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AG}$ ne sont pas colinéaires, il forment une base de (AIG).

$\overrightarrow{BK}$ étant alors normal au plan (AIG), la droite (BK) est donc orthogonale à (AIG).

3. Le vecteur $\vec{n} = -2\overrightarrow{BK} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est alors un vecteur normal au plan (AIG) donc il a une équation de la forme : $2x - y - z + d = 0$. Or $A \in (AIG) \Rightarrow d = -2x_A + y_A + z_A = 0$.

Donc $2x - y - z = 0$ est bien une équation de (AIG).

4. On a immédiatement : (BK): $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = \frac{1}{2}t \\ z = \frac{1}{2}t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

5. Soit $M\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. On a $2x_M - y_M - z_M = 0$ donc $M \in (AIG)$.

D'autre part, on a : $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AG} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{AG} \Rightarrow \overrightarrow{BM} \perp (AIG)$.

M est donc le projeté orthogonal de B sur (AIG) : donc $M = L\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

• <u>2e méthode :</u> Dire que L est le point d'intersection de (BK) et de (AIG) et le trouver en résolvant le système $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = \frac{1}{2}t \\ z = \frac{1}{2}t \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$

6. La distance de B à (AIG) est : $h = d\big(B,(AIG)\big) = BL = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Partie 2

1. a. $ABCDEFGH$ est un cube, donc $(GF) \perp (AIB)$. La droite (GF) est donc la hauteur relative à la base AIB dans le tétraèdre $ABIG$.

b. Soit M le milieu de $[AB]$. Le triangle AIB a pour base $AB = 1$ et pour hauteur $IM = 1$.

L'aire de AIB est donc : $\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$.

Le volume de $ABIG$ est donc : $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times GF = \frac{1}{6} \times 1 = \frac{1}{6}$

2. AIG est isocèle et a par exemple pour base $AG = \sqrt{3}$ associée à la hauteur IO.

Or $O\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ donc $\overrightarrow{IO}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} \Rightarrow IO = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ainsi l'aire de AIG est $\frac{1}{2}\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$ CQFD.

3. Le tétraèdre $ABIG$ a aussi pour base AIG et pour hauteur la distance x du point B au plan (AIG).

Ainsi on doit avoir : $\frac{1}{3}x \times \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{1}{6} \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ (même résultat que dans la partie 1)